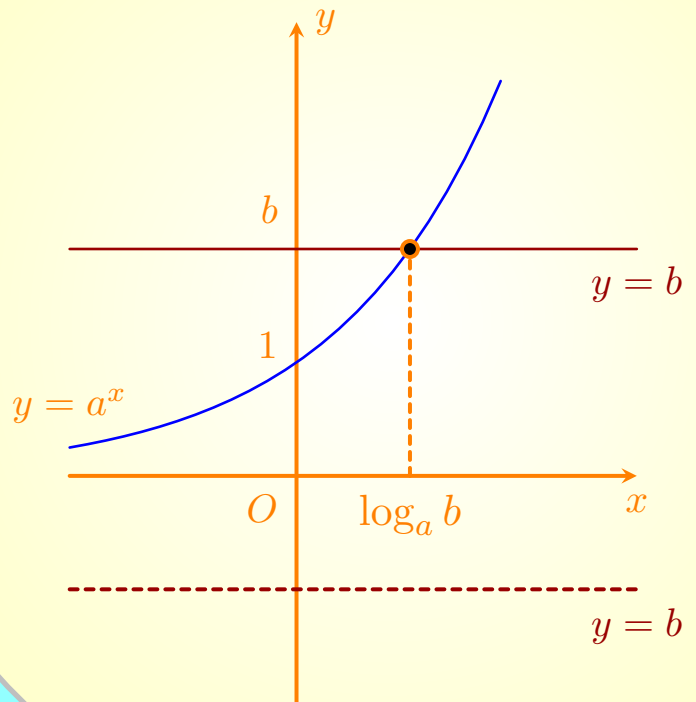


# Toán 12

TNTTHTT

TÀI LIỆU ÔN TẬP 2023

## Phát triển Đề Minh Họa



LQĐ

$\pi$

# MỤC LỤC

<b>Phần 1</b>	<b>50 CÂU PHÁT TRIỂN ĐỀ MH 2023</b>	<b>1</b>
<b>1</b>	<b>Điểm biểu diễn số phức</b>	<b>1</b>
A	Kiến thức cần nhớ	1
B	Bài tập mẫu	1
C	Bài tập tương tự và phát triển	1
D	Bảng đáp án	4
<b>2</b>	<b>Hàm số logarit</b>	<b>5</b>
A	Kiến thức cần nhớ	5
B	Bài tập mẫu	6
C	Bài tập tương tự và phát triển	6
D	Bảng đáp án	7
<b>3</b>	<b>Đạo hàm hàm lũy thừa - Hàm mũ - logarit</b>	<b>8</b>
A	Kiến thức cần nhớ	8
B	Bài tập mẫu	8
C	Bài tập tương tự và phát triển	8
D	Bảng đáp án	10
<b>4</b>	<b>Phương trình mũ – Bất phương trình mũ</b>	<b>11</b>
A	Kiến thức cần nhớ	11
B	Bài tập mẫu	12
C	Bài tập tương tự và phát triển	12
D	Bảng đáp án	13
<b>5</b>	<b>Cấp số cộng, cấp số nhân</b>	<b>14</b>
A	Kiến thức cần nhớ	14
B	Bài tập mẫu	15
C	Bài tập tương tự và phát triển	15
D	Bảng đáp án	16
<b>6</b>	<b>Phương trình mặt phẳng</b>	<b>17</b>
A	Kiến thức cần nhớ	17
B	Bài tập mẫu	18

	C Bài tập tương tự và phát triển .....	18
	D Bảng đáp án .....	20
<b>7</b>	<b>Bài toán liên quan đến giao điểm giữa các đồ thị .....</b>	<b>21</b>
	A Kiến thức cần nhớ .....	21
	B Bài tập mẫu .....	21
	C Bài tập tương tự và phát triển .....	22
	D Bảng đáp án .....	26
<b>8</b>	<b>Tính chất tích phân .....</b>	<b>27</b>
	A Kiến thức cần nhớ .....	27
	B Bài tập mẫu .....	27
	C Bài tập tương tự và phát triển .....	27
	D Bảng đáp án .....	30
<b>9</b>	<b>Nhận dạng đồ thị hàm số .....</b>	<b>31</b>
	A Kiến thức cần nhớ .....	31
	B Bài tập mẫu .....	32
	C Bài tập tương tự và phát triển .....	32
	D Bảng đáp án .....	37
<b>10</b>	<b>Phương trình mặt cầu .....</b>	<b>38</b>
	A Kiến thức cần nhớ .....	38
	B Bài tập mẫu .....	38
	C Bài tập tương tự và phát triển .....	38
	D Bảng đáp án .....	40
<b>11</b>	<b>Góc giữa hai mặt phẳng .....</b>	<b>41</b>
	A Kiến thức cần nhớ .....	41
	B Bài tập mẫu .....	41
	C Bài tập tương tự và phát triển .....	41
	D Bảng đáp án .....	43
<b>12</b>	<b>Các phép toán cơ bản của số phức .....</b>	<b>44</b>
	A Kiến thức cần nhớ .....	44
	B Bài tập mẫu .....	45
	C Bài tập tương tự và phát triển .....	45
	D Bảng đáp án .....	46
<b>13</b>	<b>Tính thể tích khối lăng trụ đứng .....</b>	<b>47</b>
	A Kiến Thức Cần Nhớ .....	47
	B Bài tập mẫu .....	48
	C Bài tập tương tự và phát triển .....	49

	D	Bảng đáp án .....	50
<b>14</b>		<b>Thể tích khối chóp .....</b>	<b>51</b>
	A	Kiến thức cần nhớ .....	51
	B	Bài tập mẫu .....	52
	C	Bài tập tương tự và phát triển .....	52
	D	Bảng đáp án .....	54
<b>15</b>		<b>Định nghĩa, tính chất, vị trí tương đối liên quan đến mặt cầu .....</b>	<b>55</b>
	A	Kiến thức cần nhớ .....	55
	B	Bài tập mẫu .....	57
	C	Bài tập tương tự và phát triển .....	57
	D	Bảng đáp án .....	58
<b>16</b>		<b>Số phức và các phép toán .....</b>	<b>59</b>
	A	Kiến thức cần nhớ .....	59
	B	Bài tập mẫu .....	60
	C	Bài tập tương tự và phát triển .....	60
	D	Bảng đáp án .....	62
<b>17</b>		<b>Hình nón, hình trụ .....</b>	<b>63</b>
	A	Kiến thức cần nhớ .....	63
	B	Bài tập mẫu .....	64
	C	Bài tập tương tự và phát triển .....	64
	D	Bảng đáp án .....	66
<b>18</b>		<b>Phương trình đường thẳng .....</b>	<b>67</b>
	A	Kiến thức cần nhớ .....	67
	B	Bài tập mẫu .....	67
	C	Bài tập tương tự và phát triển .....	67
	D	Bảng đáp án .....	70
<b>19</b>		<b>Tìm cực trị của hàm số biết bảng biến thiên hoặc đồ thị .....</b>	<b>71</b>
	A	Kiến thức cần nhớ .....	71
	B	Bài tập mẫu .....	71
	C	Bài tập tương tự và phát triển .....	71
	D	Bảng đáp án .....	76
<b>20</b>		<b>Đường tiệm cận .....</b>	<b>77</b>
	A	Kiến thức cần nhớ .....	77
	B	Bài tập mẫu .....	77
	C	Bài tập tương tự và phát triển .....	77
	D	Bảng đáp án .....	79

<b>21</b>	<b>Phương trình và bất phương trình logarit</b>	<b>80</b>
A	Kiến thức cần nhớ	80
B	Bài tập mẫu	80
C	Bài tập tương tự và phát triển	80
D	Bảng đáp án	82
<b>22</b>	<b>Phép đếm - Hoán vị - Chính hợp - Tổ hợp</b>	<b>83</b>
A	Kiến thức cần nhớ	83
B	Bài tập mẫu	84
C	Bài tập tương tự và phát triển	84
D	Bảng đáp án	86
<b>23</b>	<b>Nguyên hàm</b>	<b>87</b>
A	Kiến thức cần nhớ	87
B	Bài tập mẫu	87
C	Bài tập tương tự và phát triển	87
D	Bảng đáp án	89
<b>24</b>	<b>Tích phân</b>	<b>90</b>
A	Kiến thức cần nhớ	90
B	Bài tập mẫu	90
C	Bài tập tương tự và phát triển	91
D	Bảng đáp án	95
<b>25</b>	<b>Nguyên hàm</b>	<b>96</b>
A	Kiến thức cần nhớ	96
B	Bài tập mẫu	97
C	Bài tập tương tự và phát triển	97
D	Bảng đáp án	99
<b>26</b>	<b>Xét tính đơn điệu dựa vào bảng biến thiên của hàm số</b>	<b>100</b>
A	Kiến thức cần nhớ	100
B	Bài tập mẫu	100
C	Bài tập tương tự và phát triển	100
D	Bảng đáp án	106
<b>27</b>	<b>Tìm cực trị của hàm số dựa vào đồ thị</b>	<b>107</b>
A	Kiến thức cần nhớ	107
B	Bài tập mẫu	107
C	Bài tập tương tự và phát triển	108
D	Bảng đáp án	111

<b>28</b>	<b>Lôgarit</b>	<b>112</b>
A	Kiến thức cần nhớ	112
B	Bài tập mẫu	112
C	Bảng đáp án	114
<b>29</b>	<b>Ứng dụng tích phân tính thể tích vật thể tròn xoay</b>	<b>115</b>
A	Kiến thức cần nhớ	115
B	Bài tập mẫu	115
C	Bài tập tương tự và phát triển	115
D	Bảng đáp án	118
<b>30</b>	<b>Góc giữa hai mặt phẳng trong không gian</b>	<b>119</b>
A	Kiến thức cần nhớ	119
B	Bài tập mẫu	120
C	Bài tập tương tự và phát triển	120
D	Bảng đáp án	123
<b>31</b>	<b>Sự tương giao của hai đồ thị</b>	<b>124</b>
A	Kiến thức cần nhớ	124
B	Bài tập mẫu	124
C	Bài tập tương tự và phát triển	124
D	Bảng đáp án	128
<b>32</b>	<b>Xét tính đơn điệu của hàm số</b>	<b>129</b>
A	Kiến thức cần nhớ	129
B	Bài tập mẫu	129
C	Bài tập tương tự và phát triển	129
D	Bảng đáp án	132
<b>33</b>	<b>Xác suất</b>	<b>133</b>
A	Kiến thức cần nhớ	133
B	Bài tập mẫu	133
C	Bài tập tương tự và phát triển	134
D	Bảng đáp án	136
<b>34</b>	<b>Phương trình mũ</b>	<b>137</b>
A	Kiến thức cần nhớ	137
B	Bài tập mẫu	137
C	Bài tập tương tự và phát triển	137
D	Bảng đáp án	138
<b>35</b>	<b>Phép đếm</b>	<b>139</b>
A	Kiến thức cần nhớ	139

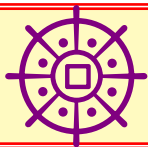
B	Bài tập mẫu .....	139
C	Bài tập tương tự và phát triển .....	140
D	Bảng đáp án .....	142
<b>36</b>	<b>Viết phương trình đường thẳng .....</b>	<b>143</b>
A	Kiến thức cần nhớ .....	143
B	Bài tập mẫu .....	143
C	Bài tập tương tự và phát triển .....	143
D	Bảng đáp án .....	147
<b>37</b>	<b>Điểm đối xứng, hình chiếu của 1 điểm .....</b>	<b>148</b>
A	Kiến thức cần nhớ .....	148
B	Bài tập mẫu .....	148
C	Bài tập tương tự và phát triển .....	149
D	Bảng đáp án .....	150
<b>38</b>	<b>Khoảng cách từ một điểm tới mặt phẳng .....</b>	<b>151</b>
A	Kiến thức cần nhớ .....	151
B	Bài tập mẫu .....	153
C	Bài tập tương tự và phát triển .....	154
D	Bảng đáp án .....	156
<b>39</b>	<b>Phương trình mũ và phương trình logarit .....</b>	<b>157</b>
A	Kiến thức cần nhớ .....	157
B	Bài tập mẫu .....	157
C	Bài tập tương tự và phát triển .....	157
D	Bảng đáp án .....	159
<b>40</b>	<b>Tích phân hàm ẩn .....</b>	<b>160</b>
A	Kiến thức cần nhớ .....	160
B	Bài tập mẫu .....	162
C	Bài tập tương tự và phát triển .....	162
D	Bảng đáp án .....	164
<b>41</b>	<b>Cực trị .....</b>	<b>165</b>
A	Kiến thức cần nhớ .....	165
B	Bài tập mẫu .....	165
C	Bài tập tương tự và phát triển .....	165
D	Bảng đáp án .....	168
<b>42</b>	<b>Cực trị của số phức .....</b>	<b>169</b>
A	Kiến thức cần nhớ .....	169
B	Bài tập mẫu .....	169

C	Bài tập tương tự và phát triển .....	170
D	Bảng đáp án .....	172
<b>43</b>	<b>Phép đếm .....</b>	<b>173</b>
A	Kiến thức cần nhớ .....	173
B	Bài tập mẫu .....	176
C	Bài tập tương tự và phát triển .....	176
D	Bảng đáp án .....	179
<b>44</b>	<b>Diện tích hình phẳng .....</b>	<b>180</b>
A	Kiến thức cần nhớ .....	180
B	Bài tập mẫu .....	181
C	Bài tập tương tự và phát triển .....	182
D	Bảng đáp án .....	186
<b>45</b>	<b>Phương trình với hệ số phức .....</b>	<b>187</b>
A	Kiến thức cần nhớ .....	187
B	Bài tập mẫu .....	187
C	Bài tập tương tự và phát triển .....	188
D	Bảng đáp án .....	189
<b>46</b>	<b>Phương trình mặt phẳng và khoảng cách .....</b>	<b>190</b>
A	Kiến thức cần nhớ .....	190
B	Bài tập mẫu .....	190
C	Bài tập tương tự và phát triển .....	190
D	Bảng đáp án .....	193
<b>47</b>	<b>Phép đếm .....</b>	<b>194</b>
A	Kiến thức cần nhớ .....	194
B	Bài tập tương tự và phát triển .....	194
C	Bảng đáp án .....	196
<b>48</b>	<b>Hình nón - Hình Trụ .....</b>	<b>197</b>
A	Kiến thức cần nhớ .....	197
B	Bài tập mẫu .....	197
C	Bài tập tương tự và phát triển .....	197
D	Bảng đáp án .....	200
<b>49</b>	<b>Tương giao đường thẳng, mặt phẳng, mặt cầu, cực trị .....</b>	<b>201</b>
A	Kiến thức cần nhớ .....	201
B	Bài tập mẫu .....	203
C	Bài tập tương tự và phát triển .....	203
D	Bảng đáp án .....	206



<b>50</b>	<b>Tính đơn điệu của hàm số liên kết .....</b>	<b>207</b>
A	Kiến thức cần nhớ .....	207
B	Bài tập mẫu .....	208
C	Bài tập tương tự và phát triển .....	209
D	Bảng đáp án .....	211

# CHUYÊN ĐỀ



## 50 CÂU PHÁT TRIỂN ĐỀ MH 2023

### DẠNG 1. ĐIỂM BIỂU DIỄN SỐ PHỨC

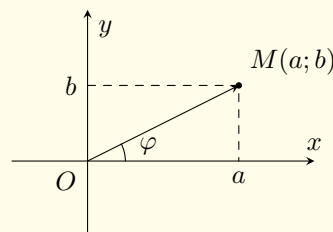
#### A KIẾN THỨC CẦN NHỚ

##### 1. Biểu diễn hình học của số phức

Biểu diễn hình học của số phức  $z = a + bi$  ( $a, b \in \mathbb{R}$ ).

a)  $M(a; b)$  là điểm biểu diễn của  $z$ .

b)  $OM = r = \sqrt{a^2 + b^2}$  là mô-đun của  $z$ .



#### B BÀI TẬP MẪU

**CÂU 1.** Trên mặt phẳng tọa độ, điểm biểu diễn số phức  $z = 7 - 6i$  có tọa độ là

(A)  $(-6; 7)$ .

(B)  $(6; 7)$ .

(C)  $(7; 6)$ .

(D)  $(7; -6)$ .

#### C BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ PHÁT TRIỂN

##### Câu 1.1.

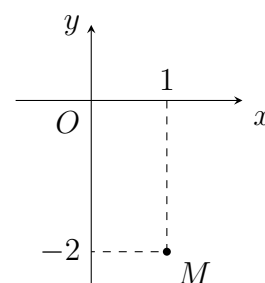
Số phức nào dưới đây có điểm biểu diễn trên mặt phẳng tọa độ là điểm  $M$  như hình vẽ bên?

(A)  $1 - 2i$ .

(B)  $i + 2$ .

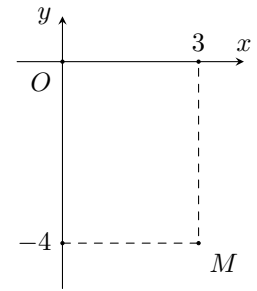
(C)  $i - 2$ .

(D)  $1 + 2i$ .



##### Câu 1.2.

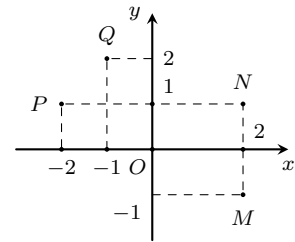
Điểm  $M$  trong hình bên là điểm biểu diễn của số phức  $z$ . Mệnh đề nào sau đây đúng?



- (A) Số phức  $z$  có phần thực là 3 và phần ảo là  $-4$ .
- (B) Số phức  $z$  có phần thực là 3 và phần ảo là  $-4i$ .
- (C) Số phức  $z$  có phần thực là  $-4$  và phần ảo là 3.
- (D) Số phức  $z$  có phần thực là  $-4$  và phần ảo là  $3i$ .

**Câu 1.3.**

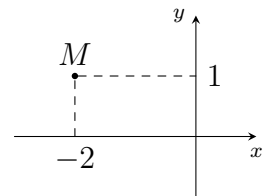
Điểm nào trong hình vẽ bên là điểm biểu diễn số phức  $z = -1 + 2i$ ?



- (A)  $N$ .
- (B)  $P$ .
- (C)  $M$ .
- (D)  $Q$ .

**Câu 1.4.**

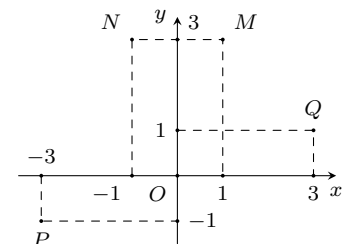
Số phức nào dưới đây có điểm biểu diễn trên mặt phẳng tọa độ là điểm  $M$  như hình vẽ bên?



- (A)  $z_4 = 2 + i$ .
- (B)  $z_2 = 1 - 2i$ .
- (C)  $z_3 = -2 + i$ .
- (D)  $z_1 = 1 - 2i$ .

**Câu 1.5.**

Cho số phức  $z = (1 + i)(2 - i)$ . Điểm nào trong hình vẽ dưới đây là điểm biểu diễn của  $z$ ?



- (A)  $M$ .
- (B)  $P$ .
- (C)  $N$ .
- (D)  $Q$ .

**Câu 1.6.** Trên mặt phẳng tọa độ, điểm biểu diễn số phức  $z = (1 + 2i)^2$  là điểm nào dưới đây?

- (A)  $P(-3; 4)$ .
- (B)  $Q(5; 4)$ .
- (C)  $N(4; -3)$ .
- (D)  $M(4; 5)$ .

**Câu 1.7.** Biết  $M(1; -2)$  là điểm biểu diễn số phức  $\bar{z}$ , số phức  $z$  bằng

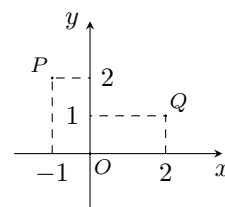
- (A)  $2 + i$ .
- (B)  $1 + 2i$ .
- (C)  $2 - i$ .
- (D)  $1 - 2i$ .

**Câu 1.8.** Gọi  $M$  và  $M'$  lần lượt là các điểm biểu diễn cho các số phức  $z$  và  $\bar{z}$ . Xác định mệnh đề đúng.

- (A)  $M$  và  $M'$  đối xứng với nhau qua trục hoành.
- (B)  $M$  và  $M'$  đối xứng với nhau qua trục tung.
- (C)  $M$  và  $M'$  đối xứng với nhau qua gốc tọa độ.
- (D) Ba điểm  $O, M, M'$  thẳng hàng.

**Câu 1.9.**

Trong hình vẽ bên, điểm  $P$  biểu diễn số phức  $z_1$ , điểm  $Q$  biểu diễn số phức  $z_2$ . Tìm số phức  $z = z_1 + z_2$ ?



- (A)  $1 + 3i$ .      (B)  $-3 + i$ .      (C)  $-1 + 2i$ .      (D)  $2 + i$ .

**Câu 1.10.** Cho số phức  $z = 1 + \sqrt{3}i$ . Nghịch đảo của  $z$  có điểm biểu diễn là

- (A)  $N\left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ .      (B)  $M\left(\frac{1}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ .      (C)  $P\left(\frac{1}{4}; \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$ .      (D)  $Q\left(\frac{1}{4}; -\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$ .

**Câu 1.11.** Cho số phức  $z_1 = 1 - 2i$ ,  $z_2 = -3 + i$ . Điểm nào dưới đây là điểm biểu diễn của số phức  $w = z_1 + z_2$  trên mặt phẳng tọa độ?

- (A)  $N(4; -3)$ .      (B)  $M(2; -5)$ .      (C)  $P(-2; -1)$ .      (D)  $Q(-1; 7)$ .

**Câu 1.12.** Cho số phức  $z = 1 - 2i$ . Điểm nào dưới đây là điểm biểu diễn của số phức  $w = iz$  trên mặt phẳng tọa độ?

- (A)  $Q(1; 2)$ .      (B)  $N(2; 1)$ .      (C)  $M(1; -2)$ .      (D)  $P(-2; 1)$ .

**Câu 1.13.** Cho số phức  $z = 3 - 2i$ . Khi đó số phức  $w = z + i\bar{z}$  có điểm biểu diễn trên mặt phẳng tọa độ là điểm nào dưới đây?

- (A)  $H(1; -5)$ .      (B)  $G(5; -5)$ .      (C)  $E(1; 1)$ .      (D)  $F(5; 1)$ .

**Câu 1.14.** Cho số phức  $z$  thỏa mãn  $iz + 2 - i = 0$ . Khoảng cách từ điểm biểu diễn của  $z$  trên mặt phẳng tọa độ  $Oxy$  đến điểm  $M(3; -4)$  bằng

- (A)  $2\sqrt{5}$ .      (B)  $\sqrt{13}$ .      (C)  $2\sqrt{10}$ .      (D)  $2\sqrt{2}$ .

**Câu 1.15.** Trên mặt phẳng phức, cho điểm  $A$  biểu diễn số phức  $3 - 2i$ , điểm  $B$  biểu diễn số phức  $-1 + 6i$ . Gọi  $M$  là trung điểm của  $AB$ . Khi đó điểm  $M$  biểu diễn số phức nào trong các số phức sau?

- (A)  $1 - 2i$ .      (B)  $2 - 4i$ .      (C)  $2 + 4i$ .      (D)  $1 + 2i$ .

**Câu 1.16.** Trên mặt phẳng phức, các điểm  $A, B, C$  lần lượt là các điểm biểu diễn của các số phức  $z_1 = -3i$  và  $z_2 = 2 - 2i$ ,  $z_3 = -i - 5$ . Số phức  $z$  biểu diễn trọng tâm  $G$  của tam giác  $ABC$  là

- (A)  $z = -1 - 2i$ .      (B)  $z = -2 + i$ .      (C)  $z = -1 - i$ .      (D)  $z = -1 + i$ .

**Câu 1.17.** Nếu điểm  $M(x; y)$  là điểm biểu diễn hình học của số phức  $z$  trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$  thỏa mãn  $OM = 4$  thì

- (A)  $|z| = \frac{1}{4}$ .      (B)  $|z| = 4$ .      (C)  $|z| = 16$ .      (D)  $|z| = 2$ .

**Câu 1.18.** Cho các số phức  $z, z'$  có biểu diễn hình học lần lượt là các điểm  $M, M'$  trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ . Nếu  $OM = 2OM'$  thì

- (A)  $|z| = 2|z'|$ .      (B)  $z' = 2z$ .      (C)  $z = 2z'$ .      (D)  $|z'| = 2|z|$ .



## DẠNG 2. HÀM SỐ LOGARIT

### A KIẾN THỨC CẦN NHỚ

#### 1. Hàm số logarit

Với  $a$  là số thực dương khác 1.

- Hàm số logarit cho bởi công thức:  $y = \log_a x$ .
- Tập xác định:  $\mathcal{D} = (0; +\infty)$ .
- Với hàm số  $y = \log_a u(x)$  thì điều kiện xác định là  $u(x) > 0$ .

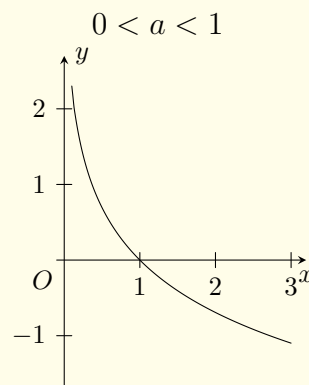
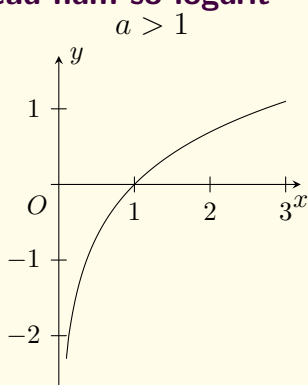
#### 2. Đạo hàm của hàm số logarit

- Với  $y = \ln x$  thì  $y' = \frac{1}{x}$ .
- Với  $y = \log_a x$  thì  $y' = \frac{1}{x \ln a}$ .
- Với  $y = \ln u(x)$  thì  $y' = \frac{u'(x)}{u(x)}$ .
- Hàm số hợp  $y = \log_a [u(x)]$  thì  $y' = \frac{u'(x)}{u(x) \ln a}$ .
- Với  $y = \log_a |u(x)|$  thì  $y' = \frac{u'(x)}{u(x) \ln a}$ .

#### 3. Sự biến thiên của hàm số logarit

- Với  $a > 1$  thì hàm số  $y = \log_a x$  đồng biến trên  $(0; +\infty)$ .
- Với  $0 < a < 1$  thì hàm số  $y = \log_a x$  nghịch biến trên  $(0; +\infty)$ .

#### 4. Đồ thị của hàm số logarit



**B BÀI TẬP MẪU**

**CÂU 2 (Đề minh họa BGD 2022-2023).**

Trên khoảng  $(0; +\infty)$ , đạo hàm của hàm số  $y = \log_3 x$  là

- (A)  $y' = \frac{1}{x}$ .      (B)  $y' = \frac{1}{x \ln 3}$ .      (C)  $y' = \frac{\ln 2}{x}$ .      (D)  $y' = -\frac{1}{x \ln 3}$ .

**C BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ PHÁT TRIỂN**

**Câu 2.1.** Tính đạo hàm của hàm số  $y = \log_3(3x + 1)$ .

- (A)  $y' = \frac{3}{(3x + 1) \ln 3}$ .      (B)  $y' = \frac{1}{(3x + 1) \ln 3}$ .      (C)  $y' = \frac{3}{3x + 1}$ .      (D)  $y' = \frac{1}{3x + 1}$ .

**Câu 2.2.** Đạo hàm của hàm số  $y = \log_3(1 - 2x)$  là

- (A)  $y' = \frac{2}{(1 - 2x) \ln 3}$ .      (B)  $y' = \frac{1}{(1 - 2x) \ln 3}$ .      (C)  $y' = \frac{-2}{(1 - 2x) \ln 3}$ .      (D)  $y' = \frac{-2 \ln 3}{1 - 2x}$ .

**Câu 2.3.** Đạo hàm của hàm số  $y = \log_3(2 - x)$  là

- (A)  $y' = \frac{1}{(x - 2) \ln 3}$ .      (B)  $y' = \frac{\ln 3}{2 - x}$ .      (C)  $y' = \frac{1}{(2 - x) \ln 3}$ .      (D)  $y' = \frac{\ln 3}{x - 2}$ .

**Câu 2.4.** Tính đạo hàm của hàm số  $y = \log_3(2x + 1)$ .

- (A)  $y' = \frac{1}{2x + 1}$ .      (B)  $y' = \frac{2}{(2x + 1) \ln 3}$ .  
 (C)  $y' = (2x + 1) \cdot \ln 3$ .      (D)  $y' = \frac{1}{(2x + 1) \ln 3}$ .

**Câu 2.5.** Tính đạo hàm của hàm số  $y = \log_3(3x + 2)$ .

- (A)  $y' = \frac{1}{(3x + 2)}$ .      (B)  $y' = \frac{3}{(3x + 2)}$ .      (C)  $y' = \frac{3}{(3x + 2) \ln 3}$ .      (D)  $y' = \frac{1}{(3x + 2) \ln 3}$ .

**Câu 2.6.** Đạo hàm của hàm số  $y = \ln(x^2 + x + 1)$  là hàm số nào sau đây?

- (A)  $y' = \frac{-(2x + 1)}{x^2 + x + 1}$ .      (B)  $y' = \frac{-1}{x^2 + x + 1}$ .      (C)  $y' = \frac{2x + 1}{x^2 + x + 1}$ .      (D)  $y' = \frac{1}{x^2 + x + 1}$ .

**Câu 2.7.** Đạo hàm của hàm số  $y = x + \ln^2 x$  là hàm số nào dưới đây?

- (A)  $y' = 1 + 2x \ln x$ .      (B)  $y' = 1 + 2 \ln x$ .      (C)  $y' = 1 + \frac{2}{x \ln x}$ .      (D)  $y' = 1 + \frac{2 \ln x}{x}$ .

**Câu 2.8.** Tính đạo hàm của hàm số  $y = \log x$ .

- (A)  $y' = \frac{x}{\ln 10}$ .      (B)  $y' = \frac{\ln 10}{x}$ .      (C)  $y' = \frac{1}{x \ln 10}$ .      (D)  $y' = \frac{1}{x}$ .

**Câu 2.9.** Đạo hàm của hàm số  $y = \log(1 - x)$  bằng

- (A)  $\frac{1}{x - 1}$ .      (B)  $\frac{1}{(x - 1) \ln 10}$ .      (C)  $\frac{1}{1 - x}$ .      (D)  $\frac{1}{(1 - x) \ln 10}$ .

**Câu 2.10.** Tính đạo hàm của hàm số  $f(x) = \ln|x|$ .

- (A)  $f'(x) = \frac{1}{|x|}$ .      (B)  $f'(x) = \frac{1}{x}$ .      (C)  $f'(x) = -\frac{1}{x}$ .      (D)  $f'(x) = -\frac{1}{|x|}$ .

**Câu 2.11.** Đạo hàm của hàm số  $y = \log_3(2x - 3)$  tại điểm  $x = 2$  bằng

- (A)  $\frac{2}{\ln 3}$ .      (B)  $\frac{1}{2 \ln 3}$ .      (C)  $2 \ln 3$ .      (D) 1.

**Câu 2.12.** Đạo hàm của hàm số  $y = \log_3(4x + 1)$  là

(A)  $y' = \frac{4 \ln 3}{4x + 1}$ .      (B)  $y' = \frac{1}{(4x + 1) \ln 3}$ .      (C)  $y' = \frac{4}{(4x + 1) \ln 3}$ .      (D)  $y' = \frac{\ln 3}{4x + 1}$ .

**Câu 2.13.** Tính đạo hàm của hàm số  $y = \ln(3x^2 + 1)$ .

(A)  $y' = \frac{6x}{3x^2 + 1}$ .      (B)  $y' = \frac{6x + 1}{3x^2 + 1}$ .      (C)  $y' = \frac{1}{3x^2 + 1}$ .      (D)  $y' = \frac{3x}{3x^2 + 1}$ .

**Câu 2.14.** Tính đạo hàm của hàm số  $y = \log_5(x^2 + 2)$ .

(A)  $y' = \frac{2x}{x^2 + 2}$ .      (B)  $y' = \frac{2x}{(x^2 + 2) \ln 5}$ .      (C)  $y' = \frac{2x \ln 5}{x^2 + 2}$ .      (D)  $y' = \frac{1}{(x^2 + 2) \ln 5}$ .

**Câu 2.15.** Đạo hàm của hàm số  $y = \log_2(x - 1)$  trên tập xác định là

(A)  $\frac{1}{(x - 1) \ln 2}$ .      (B)  $\frac{\ln 2}{x - 1}$ .      (C)  $\frac{1}{(1 - x) \ln 2}$ .      (D)  $\frac{\ln 2}{1 - x}$ .

**Câu 2.16.** Tính đạo hàm của hàm số  $y = \log_8(6x - 5)$ .

(A)  $y' = \frac{2}{(6x - 5) \ln 2}$ .      (B)  $y' = \frac{1}{(6x - 5) \ln 8}$ .      (C)  $y' = \frac{6}{6x - 5}$ .      (D)  $y' = \frac{6}{(6x - 5) \ln 4}$ .

**Câu 2.17.** Tìm đạo hàm của hàm số  $y = \log_2(1 - x)$ .

(A)  $y' = \frac{1}{\log_2(1 - x)}$ .      (B)  $y' = \frac{1}{1 - x}$ .      (C)  $y' = \frac{\ln 2}{1 - x}$ .      (D)  $y' = \frac{1}{(x - 1) \ln 2}$ .

**Câu 2.18.** Tính đạo hàm của hàm số  $y = \ln(\sin x)$ .

(A)  $y' = \tan x$ .      (B)  $y' = -\tan x$ .      (C)  $y' = \cot x$ .      (D)  $y' = -\cot x$ .

**Câu 2.19.** Đạo hàm của hàm số  $y = \ln x + x^2$  là

(A)  $y' = \frac{1}{x} + \frac{x^3}{3}$ .      (B)  $y' = \frac{1}{x} + x$ .      (C)  $y' = \frac{1}{x} + 2x$ .      (D)  $y' = \frac{1}{x} - 2x$ .

**Câu 2.20.** Đạo hàm của hàm số  $y = \log_8(x^2 - 3x - 4)$  là

(A)  $y' = \frac{2x - 3}{(x^2 - 3x - 4) \ln 2}$ .      (B)  $y' = \frac{2x - 3}{x^2 - 3x - 4}$ .  
 (C)  $y' = \frac{1}{(x^2 - 3x - 4) \ln 8}$ .      (D)  $y' = \frac{2x - 3}{(x^2 - 3x - 4) \ln 8}$ .

### D BẢNG ĐÁP ÁN

2.1. A	2.2. C	2.3. A	2.4. B	2.5. C	2.6. C	2.7. D	2.8. C
2.9. B	2.10. B	2.11. A	2.12. C	2.13. A	2.14. B	2.15. A	2.16. A
2.17. D	2.18. C	2.19. C	2.20. D				



## DẠNG 3. ĐẠO HÀM HÀM LŨY THỪA - HÀM MŨ - LOGARIT

### A KIẾN THỨC CẦN NHỚ

- $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1} \Rightarrow (u^\alpha)' = \alpha \cdot u^{\alpha-1} \cdot u'$ .
- $(a^u)' = a^u \ln a \cdot u' \Rightarrow (a^x)' = a^x \cdot \ln a$ .
- $(e^u)' = u' \cdot e^u \Rightarrow (e^x)' = e^x$ .
- $(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a} \Rightarrow (\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$ .
- $(\ln x)' = \frac{1}{x} \Rightarrow (\ln u)' = \frac{u'}{u}$ .

### B BÀI TẬP MẪU

#### CÂU 3 (ĐỀ Minh họa BGD 2022-2023).

Trên khoảng  $(0; +\infty)$ , đạo hàm của hàm số  $y = x^\pi$  là

- A  $y' = \pi x^{\pi-1}$ .     
  B  $y' = x^{\pi-1}$ .     
  C  $y' = \frac{1}{\pi} x^{\pi-1}$ .     
  D  $y' = \pi x^\pi$ .

### C BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ PHÁT TRIỂN

**Câu 3.1.** Trên khoảng  $(0; +\infty)$ , đạo hàm của hàm số  $y = x^e$  là

- A  $y' = e \cdot x^{e-1}$ .     
  B  $y' = x^{e-1}$ .     
  C  $y' = \frac{1}{e} x^{e-1}$ .     
  D  $y' = e \cdot x^e$ .

**Câu 3.2.** Tính đạo hàm của hàm số  $y = (x^2 + x)^\alpha$  với  $\alpha$  là hằng số.

- A  $2\alpha (x^2 + x)^{\alpha-1}$ .     
  B  $\alpha (x^2 + x)^{\alpha+1} (2x + 1)$ .  
 C  $\alpha (x^2 + x)^{\alpha-1} (2x + 1)$ .     
  D  $\alpha (x^2 + x)^{\alpha-1}$ .

**Câu 3.3.** Đạo hàm của hàm số  $y = \sqrt[3]{x^2 \cdot \sqrt{x^3}}$  trên khoảng  $(0; +\infty)$  là

- A  $\frac{7}{6} \sqrt[6]{x}$ .     
  B  $\frac{4}{3} \sqrt[3]{x}$ .     
  C  $7 \sqrt[6]{x}$ .     
  D  $\sqrt[9]{x}$ .

**Câu 3.4.** Cho hàm số  $y = x^\pi$ . Giá trị của  $y''(1)$  bằng

- A  $\ln^2 \pi$ .     
  B  $\pi \ln \pi$ .     
  C  $0$ .     
  D  $\pi (\pi - 1)$ .

**Câu 3.5.** Tính đạo hàm của hàm số  $y = 2019^x$ .

- A  $y' = 2019^{x-1}$ .     
  B  $y' = 2019^x$ .  
 C  $y' = 2019^x \cdot \ln 2019$ .     
  D  $y' = x \cdot 2019^{x-1}$ .

**Câu 3.6.** Đạo hàm của hàm số  $y = 5^x$  là

- A  $5^x \cdot \ln x$ .     
  B  $x \cdot 5^{x-1}$ .     
  C  $5^x \cdot \ln 5$ .     
  D  $5^x$ .

**Câu 3.7.** Đạo hàm của hàm số  $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$  là

- (A)  $f'(x) = -\left(\frac{1}{2}\right)^x \cdot \ln 2.$       (B)  $f'(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x \cdot \log 2.$   
 (C)  $f'(x) = -\left(\frac{1}{2}\right)^x \cdot \log 2.$       (D)  $f'(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x \cdot \ln 2.$

**Câu 3.8.** Đạo hàm của hàm số  $y = 2^{2x^2+x}$  là

- (A)  $2^{2x^2+x} \cdot \ln 2.$       (B)  $(4x + 1) \cdot 2^{2x^2+x} \cdot \ln 2.$   
 (C)  $(2x^2 + x) 2^{2x^2+x} \ln 2.$       (D)  $(4x + 1) \ln(2x^2 + x).$

**Câu 3.9.** Đạo hàm của hàm số  $y = e^{2x-3}$  là

- (A)  $y' = 2e^{2x}.$       (B)  $y' = e^{2x-3}.$   
 (C)  $y' = (2x - 3)e^{2x-3}.$       (D)  $y' = 2e^{2x-3}.$

**Câu 3.10.** Đạo hàm của hàm số  $y = e^{x^2+x}$  là

- (A)  $(x^2 + x) \cdot e^{2x+1}.$       (B)  $(2x + 1) \cdot e^{2x+1}.$       (C)  $(2x + 1) \cdot e^{x^2+x}.$       (D)  $(2x + 1) \cdot e^x.$

**Câu 3.11.** Tính đạo hàm của hàm số  $y = e^{\cos 2x}.$

- (A)  $y' = \sin 2x \cdot e^{\cos 2x}.$       (B)  $y' = \frac{1}{2} \sin 2x \cdot e^{\cos 2x}.$   
 (C)  $y' = 2 \cos 2x \cdot e^{\sin 2x}.$       (D)  $y' = -2 \sin 2x \cdot e^{\cos 2x}.$

**Câu 3.12.** Hàm số  $f(x) = 2^{x^2+3x+1}$  có đạo hàm là

- (A)  $f'(x) = \frac{2x + 3}{2^{x^2+3x+1} \ln 2}.$       (B)  $f'(x) = 2^{x^2+3x+1} (2x + 3) \ln 2.$   
 (C)  $f'(x) = \frac{2x + 3}{2^{x^2+3x+1}}.$       (D)  $f'(x) = 2^{x^2+3x+1} (2x + 3).$

**Câu 3.13.** Đạo hàm của hàm số  $y = 3^x + 1$  là

- (A)  $y' = 3^x \ln 3.$       (B)  $y' = 3^x.$       (C)  $y' = \frac{3^x}{\ln 3}.$       (D)  $y' = x3^{x-1}.$

**Câu 3.14.** Đạo hàm của hàm số  $y = 5^{\sin x}$  là

- (A)  $5^{\sin x} \cdot \ln 5 \cdot \cos x.$       (B)  $5^{\sin x} \cdot \cos x.$       (C)  $5^{\sin x-1} \cdot \sin x.$       (D)  $5^{\sin x} \cdot \ln 5.$

**Câu 3.15.** Đạo hàm của hàm số  $y = (x^2 - 2x + 2)e^x$  là

- (A)  $(x^2 + 2)e^x.$       (B)  $x^2 e^x.$       (C)  $(2x - 2)e^x.$       (D)  $-2xe^x.$

**Câu 3.16.** Đạo hàm của hàm số  $y = \log_2(2x + 1)$  là

- (A)  $\frac{2}{(2x + 1) \cdot \ln x}.$       (B)  $\frac{2}{(2x + 1) \cdot \ln 2}.$       (C)  $\frac{2 \cdot \ln 2}{x + 1}.$       (D)  $\frac{2}{(x + 1) \cdot \ln 2}.$

**Câu 3.17.** Đạo hàm của hàm số  $y = \log_2(x^2 + 1)$  là

- (A)  $\frac{2x}{(x^2 + 1) \cdot \ln 2}.$       (B)  $\frac{1}{x^2 + 1}.$       (C)  $\frac{1}{(x^2 + 1) \cdot \ln 2}.$       (D)  $\frac{2x}{x^2 + 1}.$

**Câu 3.18.** Đạo hàm của hàm số  $y = \log(x^2 - x)$  là

- (A)  $\frac{1}{(x^2 - x) \cdot \ln 10}.$       (B)  $\frac{2x - 1}{x^2 - x}.$       (C)  $\frac{2x - 1}{(x^2 - x) \cdot \ln 10}.$       (D)  $\frac{2x - 1}{(x^2 - 1) \cdot \log e}.$

**Câu 3.19.** Đạo hàm của hàm số  $y = \log(e^x + 2)$  là

- (A)  $\frac{e^x}{(e^x + 2) \cdot \ln 10}.$       (B)  $\frac{e^x}{e^x + 2}.$       (C)  $\frac{1}{(e^x + 2) \cdot \ln 10}.$       (D)  $\frac{1}{e^x + 2}.$

**Câu 3.20.** Đạo hàm của hàm số  $y = e^x - \ln(3x)$  là

Ⓐ  $e^x - \frac{1}{3x}$ .

Ⓑ  $e^x - \frac{1}{x}$ .

Ⓒ  $e^x - \frac{3}{x}$ .

Ⓓ  $e^x + \frac{1}{x}$ .

**Ⓓ BẢNG ĐÁP ÁN**

3.1. A	3.2. C	3.3. A	3.4. D	3.5. C	3.6. C	3.7. A	3.8. B	3.9. D	3.10.C
3.11.D	3.12.B	3.13.A	3.14.A	3.15.B	3.16.B	3.17.A	3.18.C	3.19.A	3.20.B

# DẠNG 4. PHƯƠNG TRÌNH MŨ – BẤT PHƯƠNG TRÌNH MŨ

## A KIẾN THỨC CẦN NHỚ

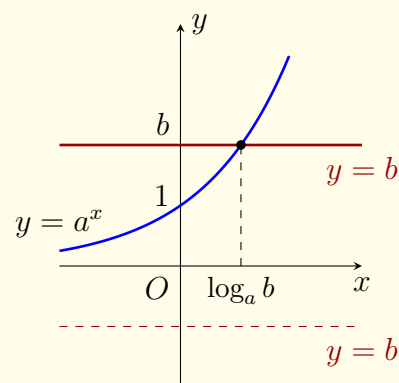
### 1. Công thức nghiệm của phương trình mũ

- Dạng  $a^x = b$  (1), với  $a > 0$  và  $a \neq 1$ .
- Về mặt đồ thị, nghiệm của (1) là hoành độ giao điểm của đồ thị  $y = a^x$  với đường thẳng  $y = b$  (nằm ngang).

Từ hình vẽ, ta có các kết quả sau:

a)  $b > 0$  (1) có nghiệm duy nhất  $x = \log_a b$ .

b)  $b \leq 0$  (1) vô nghiệm.



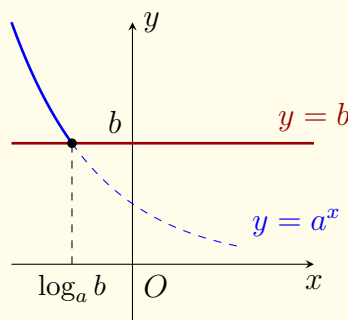
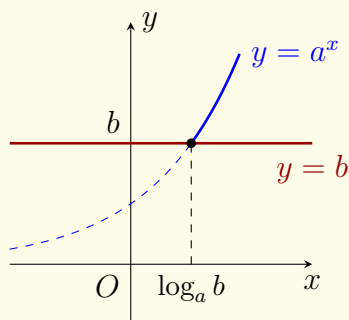
- **Tóm lại:** Với  $a > 0$  và  $a \neq 1$ ,  $b > 0$ , ta có các công thức sau đây:

a)  $a^{f(x)} = b \Leftrightarrow f(x) = \log_a b$ .

b)  $a^{f(x)} = a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) = g(x)$ .

### 2. Công thức nghiệm của bất phương trình mũ

Minh họa dạng  $a^x > b$ , với  $a > 0$  và  $a \neq 1$ .



- Nếu  $b \leq 0$  thì tập nghiệm của bất phương trình là  $\mathbb{R}$ .
- Nếu  $b > 0$ , ta có hai trường hợp:
  - Với  $a > 1$  thì  $a^x > b \Leftrightarrow x > \log_a b$  (Hình 1).
  - Với  $0 < a < 1$  thì  $a^x > b \Leftrightarrow x < \log_a b$  (Hình 2).

## B BÀI TẬP MẪU

**CÂU 4.** Tập nghiệm của bất phương trình  $2^{x+1} < 4$  là

- (A)  $(-\infty; 1]$ .      (B)  $(1; +\infty)$ .      (C)  $[1; +\infty)$ .      (D)  $(-\infty; 1)$ .

## C BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ PHÁT TRIỂN

**Câu 4.1.** Phương trình  $\left(\frac{1}{3}\right)^{x^2-2x-3} = 3^{x+1}$  có bao nhiêu nghiệm?

- (A) 2.      (B) 1.      (C) 0.      (D) 3.

**Câu 4.2.** Nghiệm của phương trình  $4^{x+1} = 8^{2x-3}$  là

- (A)  $x = \frac{11}{2}$ .      (B)  $x = \frac{11}{3}$ .      (C)  $x = \frac{11}{4}$ .      (D)  $x = \frac{11}{5}$ .

**Câu 4.3.** Tìm tập nghiệm của phương trình  $4^{x^2} = 2^{x+1}$ .

- (A)  $S = \{0; 1\}$ .      (B)  $S = \left\{-\frac{1}{2}; 1\right\}$ .  
 (C)  $S = \left\{\frac{1-\sqrt{5}}{2}; \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right\}$ .      (D)  $S = \left\{-1; \frac{1}{2}\right\}$ .

**Câu 4.4.** Nghiệm của phương trình  $3^{2x+1} = 27$  là

- (A)  $x = 2$ .      (B)  $x = 1$ .      (C)  $x = \frac{1}{2}$ .      (D)  $x = \frac{3}{2}$ .

**Câu 4.5.** Tập nghiệm của bất phương trình  $3^{x+2} < 9^{2x+7}$ .

- (A)  $(-5; +\infty)$ .      (B)  $(-\infty; -5)$ .      (C)  $(-4; +\infty)$ .      (D)  $(-\infty; -4)$ .

**Câu 4.6.** Tập nghiệm của bất phương trình  $2^{100x} \geq 4^{200}$  là

- (A)  $(-\infty; 4]$ .      (B)  $[4; +\infty)$ .      (C)  $[2; +\infty)$ .      (D)  $(4; +\infty)$ .

**Câu 4.7.** Nghiệm của phương trình  $5^{x-4} = \left(\frac{1}{25}\right)^{3x-1}$  là

- (A)  $x = \frac{6}{7}$ .      (B)  $x = \frac{1}{3}$ .      (C)  $x = 1$ .      (D)  $x = \frac{7}{6}$ .

**Câu 4.8.** Bất phương trình  $3^{x^2+1} > 3^{2x+1}$  có tập nghiệm là

- (A)  $S = (-2; 0)$ .      (B)  $S = (0; 2)$ .  
 (C)  $S = \mathbb{R}$ .      (D)  $S = (-\infty; 0) \cup (2; +\infty)$ .

**Câu 4.9.** Nghiệm của phương trình  $5^{2x+1} = 125$  là

- (A)  $x = 1$ .      (B)  $x = 3$ .      (C)  $x = 2$ .      (D)  $x = 4$ .

**Câu 4.10.** Tập nghiệm của phương trình  $2^{x^2-3x} = \frac{1}{4}$  là

- (A)  $S = \emptyset$ .      (B)  $S = \{1; 2\}$ .      (C)  $S = \{0\}$ .      (D)  $S = \{1\}$ .

**Câu 4.11.** Bất phương trình  $\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-2x} > \frac{1}{8}$  có tập nghiệm là  $(a; b)$ . Khi đó giá trị của  $b - a$  là

- (A) -2.      (B) -4.      (C) 2.      (D) 4.

**Câu 4.12.** Giải phương trình  $\left(\frac{1}{25}\right)^{x-1} = 125^{2x}$ .

- (A)  $x = -\frac{1}{8}$ .      (B)  $x = \frac{1}{4}$ .      (C)  $x = 4$ .      (D)  $x = -\frac{1}{4}$ .

**Câu 4.13.** Nghiệm của phương trình  $(\sqrt{2})^{2x+1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{3x}$  là

- (A)  $x = -\frac{1}{2}$ .      (B)  $x = -\frac{1}{5}$ .      (C)  $x = \frac{1}{4}$ .      (D)  $x = -\frac{1}{8}$ .

**Câu 4.14.** Tập nghiệm của bất phương trình  $2^{2x} < 2^{x+6}$  là

- (A)  $(-\infty; 6)$ .      (B)  $(0; 64)$ .      (C)  $(6; +\infty)$ .      (D)  $(0; 6)$ .

**Câu 4.15.** Tìm tập nghiệm của bất phương trình  $2^{x^2-5x+4} \leq 1$ .

- (A)  $[1; 4]$ .      (B)  $(-\infty; 1] \cup [4; +\infty)$ .  
(C)  $(-\infty; 1]$ .      (D)  $[4; +\infty)$ .

**Câu 4.16.** Nghiệm của phương trình  $2^{x+2} = 32$  là

- (A)  $x = 7$ .      (B)  $x = 8$ .      (C)  $x = 3$ .      (D)  $x = 4$ .

**Câu 4.17.** Nghiệm của phương trình  $5^{x-4} = \left(\frac{1}{25}\right)^{3x-1}$  là

- (A)  $x = \frac{7}{6}$ .      (B)  $x = \frac{6}{7}$ .      (C)  $x = \frac{1}{3}$ .      (D)  $x = 1$ .

**Câu 4.18.** Tập nghiệm của phương trình  $2^{x^2+x+1} = 8$  là

- (A)  $\{1\}$ .      (B)  $\{-2; 1\}$ .      (C)  $\{-2\}$ .      (D)  $\{1; 2\}$ .

**Câu 4.19.** Nghiệm của phương trình  $3^{2x-1} = 27$

- (A)  $x = 1$ .      (B)  $x = 2$ .      (C)  $x = 3$ .      (D)  $x = 4$ .

**Câu 4.20.** Tập nghiệm của phương trình  $2^{x^2-3x} = \frac{1}{4}$  là

- (A)  $S = \{0\}$ .      (B)  $S = \{1\}$ .      (C)  $S = \emptyset$ .      (D)  $S = \{1; 2\}$ .

**Câu 4.21.** Số nghiệm của phương trình  $3^x = \left(\frac{1}{3}\right)^x$  là

- (A) 2.      (B) 3.      (C) 0.      (D) 1.

**Câu 4.22.** Tập nghiệm của bất phương trình  $2^{x+2} < \left(\frac{1}{4}\right)^x$  là

- (A)  $(-\infty; 0)$ .      (B)  $\left(-\frac{2}{3}; +\infty\right)$ .      (C)  $(0; +\infty) \setminus \{1\}$ .      (D)  $\left(-\infty; -\frac{2}{3}\right)$ .

**Câu 4.23.** Tập nghiệm bất phương trình  $2^{x^2-3x} < 16$  là

- (A)  $(4; +\infty)$ .      (B)  $(-1; 4)$ .  
(C)  $(-\infty; -1) \cup (4; +\infty)$ .      (D)  $(-\infty; -1)$ .

### **(D) BẢNG ĐÁP ÁN**

4.1. A	4.2. C	4.3. B	4.4. B	4.5. C	4.6. B	4.7. A	4.8. D
4.9. A	4.10. B	4.11. D	4.12. B	4.13. D	4.14. A	4.15. A	4.16. C
4.17. B	4.18. B	4.19. B	4.20. D	4.21. D	4.22. D	4.23. B	

## DẠNG 5. CẤP SỐ CỘNG, CẤP SỐ NHÂN

### A KIẾN THỨC CẦN NHỚ

#### 1. Nhận dạng cấp số cộng, cấp số nhân

- Nếu  $u_{n+1} = u_n + d$ , với  $d$  là hằng số  $\Rightarrow (u_n)$  là cấp số cộng.
- Nếu  $u_{n+1} = u_n \cdot q$ , với  $q$  là hằng số  $\Rightarrow (u_n)$  là cấp số nhân.

#### 2. Số hạng tổng quát, số hạng thứ $n$

- Nếu  $(u_n)$  là cấp số cộng thì số hạng tổng quát của  $(u_n)$  là  $u_n = u_1 + (n - 1) \cdot d$ .
- Nếu  $(u_n)$  là cấp số nhân, thì số hạng tổng quát của  $(u_n)$  là  $u_n = u_1 \cdot q^{n-1}$ .

#### 3. Công sai, công bội

- Cấp số cộng  $(u_n)$  có công sai là  $d = u_{n+1} - u_n$ .
- Cấp số nhân  $(u_n)$  có công bội là  $q = \frac{u_{n+1}}{u_n}$ .

#### 4. Tổng $n$ số hạng đầu của cấp số cộng, cấp số nhân

- Tổng  $n$  số hạng đầu tiên  $S_n$  của cấp số cộng  $(u_n)$  được xác định bởi công thức

$$S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n = \frac{n}{2} (u_1 + u_n) = \frac{n}{2} [2u_1 + (n - 1) d].$$

- Tổng  $n$  số hạng đầu tiên  $S_n$  của cấp số nhân  $(u_n)$  được xác định bởi công thức

$$S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n = u_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q}.$$

#### 5. Điều kiện tạo thành cấp số cộng, cấp số nhân

- Ba số  $a, b, c$  theo thứ tự tạo thành một cấp số cộng  $\Leftrightarrow a + c = 2b$ .
- Ba số  $a, b, c$  theo thứ tự tạo thành một cấp số nhân  $\Leftrightarrow a \cdot c = b^2$ .

## B BÀI TẬP MẪU

### CÂU 5 (Đề minh họa BGD 2020-2021).

Cho cấp số nhân  $(u_n)$  với  $u_1 = 2$  và công bội  $q = \frac{1}{2}$ . Giá trị  $u_3$  bằng

- (A) 3.                      (B)  $\frac{1}{2}$ .                      (C)  $\frac{1}{4}$ .                      (D)  $\frac{7}{2}$ .

## C BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ PHÁT TRIỂN

**Câu 5.1.** Trong các dãy số sau, dãy số nào là một cấp số nhân?

- (A) 1; 2; 4; 8; 16; 32; ...                      (B) 2; 4; 6; 8; 16; 32; ...  
 (C) -2; -3; -4; -5; -6; -7; ...                      (D) 1; 2; 3; 4; 5; 6; ...

**Câu 5.2.** Cho cấp số nhân  $(u_n)$  với  $u_1 = 3$  và  $u_2 = 6$ . Công bội của cấp số nhân đã cho bằng

- (A) 2.                      (B) 9.                      (C) 3.                      (D)  $\frac{1}{2}$ .

**Câu 5.3.** Cho cấp số nhân  $(u_n)$  có  $u_1 = 2$  và công bội  $q = 2$ . Tính  $u_3$ ?

- (A)  $u_3 = 18$ .                      (B)  $u_3 = 6$ .                      (C)  $u_3 = 8$ .                      (D)  $u_3 = 4$ .

**Câu 5.4.** Cho cấp số nhân  $(u_n)$  thỏa mãn  $u_1 = 3; u_5 = 48$ . Công bội của cấp số nhân bằng

- (A) 2.                      (B)  $\pm 2$ .                      (C) 16.                      (D) -2.

**Câu 5.5.** Cho cấp số cộng  $(u_n)$  có  $u_1 = -2$  và công sai  $d = 3$ . Số hạng tổng quát  $u_n$  của cấp số cộng là

- (A)  $u_n = -3n + 2$ .                      (B)  $u_n = 3n - 2$ .                      (C)  $u_n = 3n - 5$ .                      (D)  $u_n = -2n + 3$ .

**Câu 5.6.** Cho cấp số cộng  $(u_n)$  với số hạng đầu  $u_1$  và công sai  $d$ . Tìm số hạng tổng quát của  $(u_n)$ ?

- (A)  $u_n = u_1 + (n - 1)d, n \geq 2$ .                      (B)  $u_n = u_1 \cdot d^n$ .  
 (C)  $u_n = u_1 \cdot d^{n-1}$ .                      (D)  $u_n = u_1 + nd$ .

**Câu 5.7.** Cho cấp số cộng  $(u_n)$  có  $u_1 = -3, u_6 = 27$ . Tính công sai  $d$ ?

- (A)  $d = 5$ .                      (B)  $d = 8$ .                      (C)  $d = 6$ .                      (D)  $d = 7$ .

**Câu 5.8.** Cho cấp số cộng  $(u_n)$  với  $u_1 = 3$  và công sai  $d = 4$ . Số hạng thứ hai của cấp số cộng đã cho là

- (A) 12.                      (B) 10.                      (C) 7.                      (D) -1.

**Câu 5.9.** Cho cấp số cộng  $(u_n)$  có  $u_2 = 1$  và  $u_3 = 3$ . Giá trị của  $u_4$  bằng

- (A) 6.                      (B) 9.                      (C) 4.                      (D) 5.

**Câu 5.10.** Cho cấp số nhân  $(u_n)$  với  $u_1 = 2$  và  $u_2 = -6$ . Công bội của cấp số nhân đã cho bằng

- (A) 3.                      (B) -3.                      (C)  $-\frac{1}{3}$ .                      (D)  $\frac{1}{3}$ .



**Câu 5.11.** Cho cấp số cộng  $(u_n)$  có  $u_1 = 123$ ,  $u_3 - u_{15} = 84$ . Số hạng  $u_{17}$  bằng  
 (A) 11. (B) 12. (C) 132. (D) 235.

**Câu 5.12.** Cho cấp số cộng với số hạng đầu  $u_1 = -3$ , số hạng cuối  $u_n = 487$  và công sai  $d = 5$ . Hỏi cấp số cộng có bao nhiêu số hạng?  
 (A) 69. (B) 79. (C) 89. (D) 99.

**Câu 5.13.** Cho cấp số nhân  $(u_n)$  với  $u_2 = 2$  và  $u_4 = 18$ . Công bội của cấp số nhân đã cho bằng  
 (A) 16. (B)  $\pm 3$ . (C)  $\frac{1}{9}$ . (D) 9.

**Câu 5.14.** Cho cấp số nhân  $(u_n)$  với  $u_1 = 3$  và  $u_4 = -24$ . Công bội của cấp số nhân đã cho bằng  
 (A) 2. (B) -2. (C) -8. (D)  $-\frac{4}{3}$ .

**Câu 5.15.** Cho cấp số nhân  $(u_n)$  có số hạng đầu  $u_1 = 2$  và công bội  $q = 3$ . Giá trị của  $u_6$  bằng  
 (A) 729. (B) 1458. (C) 243. (D) 486.

**Câu 5.16.** Cho cấp số nhân  $(u_n)$  có số hạng đầu  $u_1 = 2$  và công bội  $q = 3$ . Số hạng thứ 5 bằng  
 (A) 48. (B) 486. (C) 162. (D) 96.

**Câu 5.17.** Cho cấp số nhân  $(u_n)$  có số hạng đầu  $u_1 = 2$  và  $u_6 = 486$ . Công bội  $q$  bằng  
 (A)  $q = 3$ . (B)  $q = 5$ . (C)  $q = \frac{3}{2}$ . (D)  $q = \frac{2}{3}$ .

**Câu 5.18.** Cho cấp số nhân  $(u_n)$ , biết  $u_2 = 1$ ;  $u_3 = 5$ . Công bội  $q$  của cấp số nhân đã cho bằng  
 (A) 5. (B)  $\pm 4$ . (C) 4. (D) 21.

**Câu 5.19.** Cho cấp số nhân  $(u_n)$  có  $u_1 = 3$ , công bội  $q = 2$ . Ta có  $u_5$  bằng  
 (A) 11. (B) 48. (C) 9. (D) 24.

**Câu 5.20.** Cho cấp số nhân  $(u_n)$ , với  $u_1 = -9$ ,  $u_4 = \frac{1}{3}$ . Công bội của cấp số nhân đã cho bằng  
 (A)  $-\frac{1}{3}$ . (B) -3. (C) 3. (D)  $\frac{1}{3}$ .

**(D) BẢNG ĐÁP ÁN**

5.1. A	5.2. A	5.3. C	5.4. B	5.5. C	5.6. A	5.7. C	5.8. C
5.9. D	5.10. B	5.11. A	5.12. D	5.13. B	5.14. B	5.15. D	5.16. C
5.17. A	5.18. A	5.19. B	5.20. A				

## DẠNG 6. PHƯƠNG TRÌNH MẶT PHẪNG

### A KIẾN THỨC CẦN NHỚ

#### 1. Phương trình mặt phẳng

- Trong không gian, véc-tơ  $\vec{n}$  khác  $\vec{0}$  là véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng  $(P)$  nếu giá của nó vuông góc với mặt phẳng  $(P)$ . Hơn nữa với  $k \neq 0$  ta cũng có  $k\vec{n}$  cũng là một véc-tơ pháp tuyến của  $(P)$ .
- Trong không gian  $Oxyz$ . Đường thẳng  $(d)$  đi qua điểm  $A(x_0; y_0; z_0)$  và nhận  $\vec{n} = (a; b; c)$  làm véc-tơ pháp tuyến có phương trình tổng quát là

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0.$$

- Trong không gian  $Oxyz$ . Phương trình

$$ax + by + cz + d = 0$$

(với  $a, b, c$  không đồng thời bằng 0) là phương trình của một đường thẳng nào đó có véc-tơ pháp tuyến là  $\vec{n} = (a; b; c)$ .

#### 2. Phương trình đường thẳng

- Trong không gian, véc-tơ  $\vec{u}$  khác  $\vec{0}$  là véc-tơ chỉ phương của đường thẳng  $d$  nếu giá của nó song song với đường thẳng  $d$ . Hơn nữa với  $k \neq 0$  ta cũng có  $k\vec{u}$  cũng là một véc-tơ chỉ phương của đường thẳng  $d$ .
- Trong không gian  $Oxyz$  Đường thẳng  $d$  đi qua điểm  $A(x_0; y_0; z_0)$  và nhận  $\vec{u} = (a; b; c)$  làm véc-tơ chỉ phương có phương trình là

$$\text{Phương trình tham số } d: \begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases}$$

$$\text{Phương trình chính tắc } d: \frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c} \quad (\text{với } abc \neq 0).$$

**B BÀI TẬP MẪU**

**CÂU 6 (Đề minh họa BGD 2022-2023).**

Trong không gian  $Oxyz$ , mặt phẳng  $(P): x + y + z + 1 = 0$  có một véc-tơ pháp tuyến là

- (A)  $\vec{n}_1 = (-1; 1; 1)$ .      (B)  $\vec{n}_4 = (1; 1; -1)$ .      (C)  $\vec{n}_3 = (1; 1; 1)$ .      (D)  $\vec{n}_2 = (1; -1; 1)$ .

**C BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ PHÁT TRIỂN**

**Câu 6.1.** Trong không gian  $Oxyz$ . Mặt phẳng  $(Oxy)$  có một véc-tơ pháp tuyến là

- (A)  $\vec{i} = (1; 0; 0)$ .      (B)  $\vec{j} = (0; 1; 0)$ .      (C)  $\vec{k} = (0; 0; 1)$ .      (D)  $\vec{t} = (1; 1; 1)$ .

**Câu 6.2.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho mặt phẳng  $(P): 4x - 2y + z - 1 = 0$ . Véc-tơ nào dưới đây là một véc-tơ pháp tuyến của  $(P)$ ?

- (A)  $\vec{n}_1 = (4; -2; -1)$ .      (B)  $\vec{n}_4 = (4; 2; 1)$ .      (C)  $\vec{n}_3 = (4; -2; 0)$ .      (D)  $\vec{n}_2 = (4; -2; 1)$ .

**Câu 6.3.** Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , cho mặt phẳng  $(\alpha): 2x - y + 3z - 1 = 0$ . Véc-tơ nào sau đây là véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng  $(\alpha)$ ?

- (A)  $\vec{n} = (2; 1; 3)$ .      (B)  $\vec{n} = (-4; 2; -6)$ .      (C)  $\vec{n} = (2; 1; -3)$ .      (D)  $\vec{n} = (-2; 1; 3)$ .

**Câu 6.4.** Trong hệ trục tọa độ  $Oxyz$ , cho mặt phẳng  $(P)$  có phương trình  $3x - z + 1 = 0$ . Véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng  $(P)$  có tọa độ là

- (A)  $(-3; 1; 1)$ .      (B)  $(3; 0; -1)$ .      (C)  $(3; -1; 1)$ .      (D)  $(3; -1; 0)$ .

**Câu 6.5.** Trong không gian tọa độ  $Oxyz$ , mặt phẳng  $(Q): x - 2y + 5z + 2023 = 0$  có một véc-tơ pháp tuyến là

- (A)  $\vec{n}_2 = (3; 6; 15)$ .      (B)  $\vec{n}_3 = (-1; 2; 5)$ .      (C)  $\vec{n}_1 = (-2; 4; -10)$ .      (D)  $\vec{n}_4 = (-2; 4; 10)$ .

**Câu 6.6.** Trong không gian  $Oxyz$ , mặt phẳng  $(P): 2x + y + 3z - 1 = 0$  có một véc-tơ pháp tuyến là

- (A)  $\vec{n}_3 = (2; 1; 3)$ .      (B)  $\vec{n}_2 = (-1; 3; 2)$ .      (C)  $\vec{n}_4 = (1; 3; 2)$ .      (D)  $\vec{n}_1 = (3; 1; 2)$ .

**Câu 6.7.** Trong không gian với hệ trục tọa độ  $Oxyz$ , véc-tơ nào sau đây không phải véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng  $(P): x + 3y - 5z + 2 = 0$ ?

- (A)  $\vec{n} = (2; 6; -10)$ .      (B)  $\vec{n} = (-2; -6; -10)$ .  
(C)  $\vec{n} = (-3; -9; 15)$ .      (D)  $\vec{n} = (-1; -3; -5)$ .

**Câu 6.8.** Trong không gian với hệ trục tọa độ  $Oxyz$ , phương trình mặt phẳng nào sau đây nhận véc-tơ  $\vec{n} = (2; 1; -1)$  làm véc-tơ pháp tuyến?

- (A)  $2x + y - z - 1 = 0$ .      (B)  $2x + y + z - 1 = 0$ .  
(C)  $4x + 2y - z - 1 = 0$ .      (D)  $-2x - y - z + 1 = 0$ .

**Câu 6.9.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho mặt phẳng  $(P): \frac{x}{3} + \frac{y}{2} + \frac{z}{1} = 1$ . Véc-tơ nào dưới đây là véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng  $(P)$ ?

(A)  $\vec{n} = (3; 2; 6)$ .      (B)  $\vec{n} = (2; 3; 6)$ .      (C)  $\vec{n} = (3; 2; 1)$ .      (D)  $\vec{n} = (3; -2; -2)$ .

**Câu 6.10.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho các điểm  $A(-1; 1; 3)$ ,  $B(2; 1; 0)$  và  $C(4; -1; 5)$ . Một véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng  $(ABC)$  có tọa độ là

(A)  $(2; 7; 2)$ .      (B)  $(-2; 7; -2)$ .      (C)  $(16; 1; 6)$ .      (D)  $(16; -1; 6)$ .

**Câu 6.11.** Trong không gian  $Oxyz$ , véc-tơ nào dưới đây là véc-tơ chỉ phương của đường thẳng  $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-2}{-1}$ .

(A)  $\vec{u}_2 = (1; 1; 2)$ .      (B)  $\vec{u}_3 = (1; -1; 2)$ .      (C)  $\vec{u}_4 = (2; 1; -1)$ .      (D)  $\vec{u}_1 = (2; 1; 1)$ .

**Câu 6.12.** Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , véc-tơ nào sau đây là một véc-tơ chỉ phương của đường thẳng  $d: \frac{x}{2} = \frac{y+1}{-3} = \frac{z}{1}$ ?

(A)  $\vec{u} = (1; -3; 2)$ .      (B)  $\vec{u} = (2; 3; 1)$ .      (C)  $\vec{u} = (2; -6; 1)$ .      (D)  $\vec{u} = (4; -6; 2)$ .

**Câu 6.13.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho đường thẳng  $d: \begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 1 + t \\ z = t + 2 \end{cases} (t \in \mathbb{R})$ . Tìm tọa độ một

véc-tơ chỉ phương của đường thẳng  $d$ .

(A)  $(-2; 1; 1)$ .      (B)  $(1; 1; 1)$ .      (C)  $(2; -1; -2)$ .      (D)  $(-2; 1; 2)$ .

**Câu 6.14.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho đường thẳng  $\Delta: \frac{x+1}{-3} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+1}{1}$ . Tìm tọa độ một véc-tơ chỉ phương của  $\Delta$ .

(A)  $(-1; 2; -1)$ .      (B)  $(1; -2; 1)$ .      (C)  $(3; -2; -1)$ .      (D)  $(-3; 2; 0)$ .

**Câu 6.15.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho đường thẳng  $d: \begin{cases} x = 2 \\ y = 3 + 4t \\ z = 5 - t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$ . Véc-tơ nào dưới

đây là một véc-tơ chỉ phương của đường thẳng  $d$ ?

(A)  $\vec{u}_2 = (2; 3; 5)$ .      (B)  $\vec{u}_3 = (0; 4; -1)$ .      (C)  $\vec{u}_1 = (2; 4; -1)$ .      (D)  $\vec{u}_4 = (2; -4; -1)$ .

**Câu 6.16.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho đường thẳng  $(\Delta)$  có phương trình  $\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{3} = \frac{z+1}{-1}$ . Véc-tơ chỉ phương của đường thẳng là

(A)  $\vec{u} = (2; 3; -1)$ .      (B)  $\vec{u} = (2; 3; 1)$ .      (C)  $\vec{u} = (-2; 3; -1)$ .      (D)  $\vec{u} = (-2; -3; -1)$ .

**Câu 6.17.** Trong không gian  $Oxyz$ , đường thẳng  $d: \frac{x-1}{3} = \frac{y-5}{2} = \frac{z+2}{-5}$  có một véc-tơ chỉ phương là

(A)  $\vec{u} = (1; 5; -2)$ .      (B)  $\vec{u} = (3; 2; -5)$ .      (C)  $\vec{u} = (-3; 2; -5)$ .      (D)  $\vec{u} = (2; 3; -5)$ .

**Câu 6.18.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho đường thẳng  $d: \frac{x+2}{1} = \frac{y-1}{-3} = \frac{z+1}{2}$ . Véc-tơ nào sau đây là một véc-tơ chỉ phương của đường thẳng  $d$ ?

(A)  $\vec{u}_1 = (-2; 1; -1)$ .      (B)  $\vec{u}_1 = (1; -3; 2)$ .      (C)  $\vec{u}_3 = (-1; -3; 2)$ .      (D)  $\vec{u}_4 = (1; 3; -2)$ .

**Câu 6.19.** Trong không gian  $Oxyz$ , đường thẳng  $d$  song song với đường thẳng  $\Delta: \frac{x+2}{1} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z-3}{1}$  có véc-tơ chỉ phương là

- (A)  $\vec{u} = (1; -2; 1)$ .      (B)  $\vec{u} = (-1; -3; 4)$ .      (C)  $\vec{u} = (-2; -1; 3)$ .      (D)  $\vec{u} = (0; -2; 3)$ .

**Câu 6.20.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho đường thẳng  $d: \frac{x-1}{5} = \frac{y-2}{-8} = \frac{z+3}{7}$ . Véc-tơ nào sau đây là một véc-tơ chỉ phương của  $d$ ?

- (A)  $\vec{u}_3 = (1; 2; -3)$ .      (B)  $\vec{u}_4 = (7; -8; 5)$ .      (C)  $\vec{u}_1 = (-1; -2; 3)$ .      (D)  $\vec{u}_3 = (5; -8; 7)$ .

### **D** BẢNG ĐÁP ÁN

6.1. C	6.2. D	6.3. B	6.4. B	6.5. C	6.7. B	6.8. A	6.9. B
6.10. A	6.11. C	6.12. D	6.13. A	6.14. C	6.15. B	6.16. A	6.17. B
6.18. B	6.19. A	6.20. D					

# DẠNG 7. BÀI TOÁN LIÊN QUAN ĐẾN GIAO ĐIỂM GIỮA CÁC ĐỒ THỊ

## A KIẾN THỨC CẦN NHỚ

### 1. Số giao điểm của hai đồ thị

- Muốn tìm số giao điểm giữa đồ thị hàm  $y = f(x)$  và đường thẳng  $y = a$  ta chỉ việc vẽ đường thẳng  $y = a$  (là đường thẳng song song với trục  $Ox$  và đi qua điểm có tọa độ  $(0; a)$ ) và xác định số giao điểm.
- Chú ý: Phương trình của trục hoành (hay trục  $Ox$ ) là  $y = 0$ .
- Cho hai hàm số  $y = f(x)$  và  $y = g(x)$ , khi đó số giao điểm giữa hai đồ thị hàm số trên bằng số nghiệm của phương trình hoành độ giao điểm  $f(x) = g(x)$ .
- Trường hợp đề cho bảng biến thiên của hàm  $y = f(x)$ , để biểu diễn đường  $y = a$  ta vẽ một đường ngang sao cho hợp lí với đề bài.

### 2. Tìm giao điểm của hai đồ thị

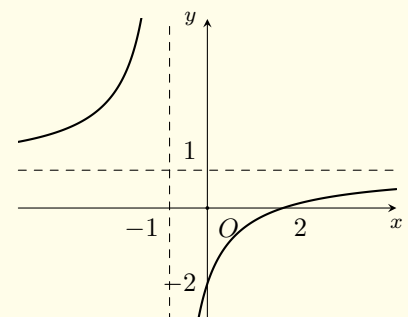
- Dựa vào đồ thị để tìm tọa độ giao điểm.
- Tìm nghiệm của phương trình hoành độ giao điểm, ta được hoành độ của giao điểm sau đó thay vào hàm số để tìm tung độ.
- Muốn tìm nghiệm của phương trình  $f(u(x)) = a$ , ta đi giải phương trình  $u(x) = x_0$  (trong đó  $x_0$  là nghiệm của phương trình  $f(x) = a$ ).

## B BÀI TẬP MẪU

### CÂU 7 (Đề tham khảo BGD 2023).

Cho hàm số  $f(x) = \frac{ax + b}{cx + d}$  có đồ thị là đường cong trong hình bên. Tọa độ giao điểm của đồ thị hàm số với trục hoành là

- A  $(0; -2)$ .    
  B  $(2; 0)$ .    
  C  $(-2; 0)$ .    
  D  $(0; 2)$ .



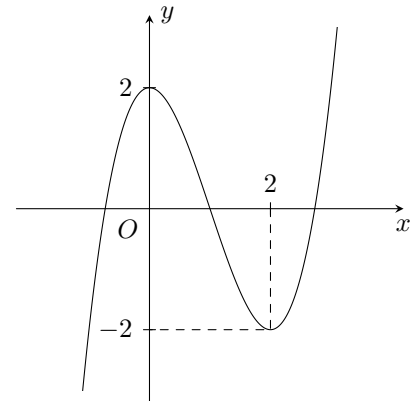
## **BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ PHÁT TRIỂN**

### **Câu 7.1.**

Cho hàm số  $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$  có đồ thị như hình bên.

Phương trình  $3f(x) + 4 = 0$  có tất cả bao nhiêu nghiệm?

- (A) 3.      (B) 0.      (C) 1.      (D) 2.

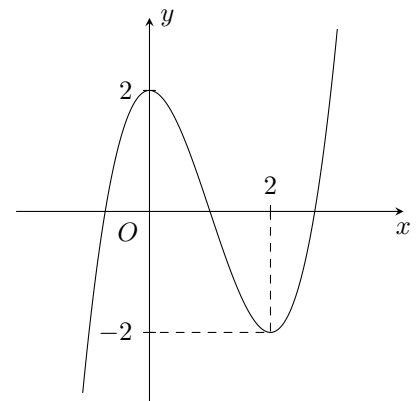


### **Câu 7.2.**

Cho hàm số  $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$  có đồ thị như hình bên.

Phương trình  $2f(x) - 5 = 0$  có tất cả bao nhiêu nghiệm?

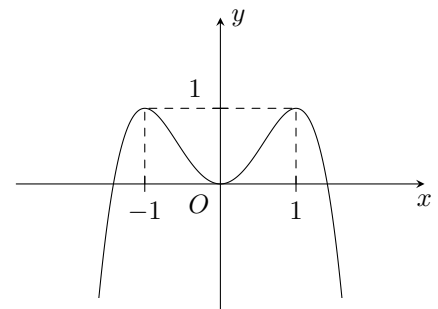
- (A) 3.      (B) 0.      (C) 1.      (D) 2.



### **Câu 7.3.**

Cho hàm số  $f(x) = ax^4 + bx^2 + c$  có đồ thị như hình bên. Số nghiệm thực của phương trình  $4f(x) - 3 = 0$  là

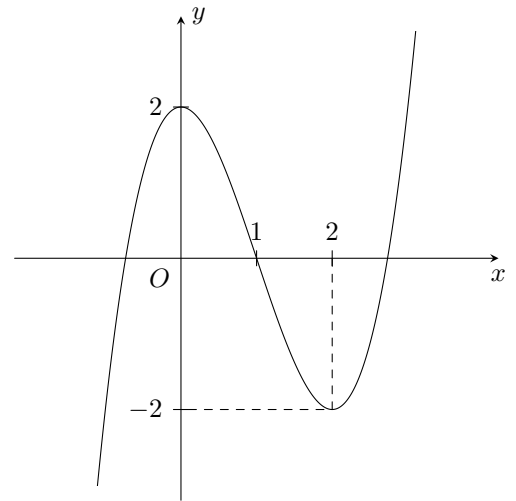
- (A) 4.      (B) 3.      (C) 2.      (D) 0.



### **Câu 7.4.**

Cho hàm số  $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$  có đồ thị như hình bên. Số nghiệm thực của phương trình  $f(x^2) = -2$  là

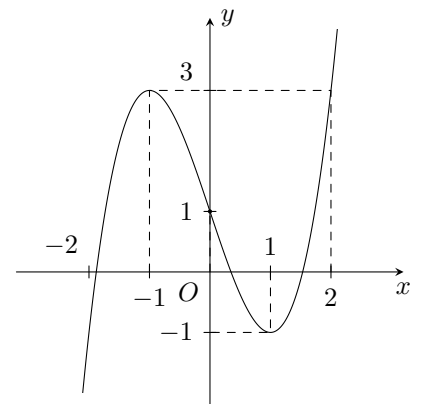
- (A) 3.      (B) 4.      (C) 0.      (D) 2.



**Câu 7.5.**

Cho hàm số  $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$  có đồ thị như hình bên. Phương trình  $f(x^2 - 2) = 3$  có tất cả bao nhiêu nghiệm?

- (A) 3.      (B) 2.      (C) 1.      (D) 4.



**Câu 7.6.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có bảng biến thiên như hình vẽ.

$x$	$-\infty$	$-2$	$0$	$2$	$+\infty$			
$y'$		-	0	+	0	-	0	+
$y$	$+\infty$			$1$			$+\infty$	

Arrows indicate the function values at the critical points:  $y = -2$  at  $x = -2$  and  $x = 2$ .

Số nghiệm của phương trình  $2f(x) + 3 = 0$  là

- (A) 4.      (B) 3.      (C) 2.      (D) 1.

**Câu 7.7.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có bảng biến thiên như hình vẽ.

$x$	$-\infty$	$-2$	$3$	$+\infty$
$y'$		+	-	+
$y$		$2$		$+\infty$

Arrows indicate the function values at the critical points:  $y = -\infty$  at  $x = -2$  and  $y = 1$  at  $x = 3$ .

Số nghiệm thực của phương trình  $2f(x) - 3 = 0$  là

- (A) 2.      (B) 1.      (C) 3.      (D) 4.



**Câu 7.8.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có bảng biến thiên như hình vẽ.

$x$	$-\infty$	$-2$	$0$	$2$	$+\infty$	
$y'$		$-$	$0$	$+$	$0$	$+$
$y$	$+\infty$		$1$		$+\infty$	

Số nghiệm của phương trình  $2f(x) - 3 = 0$  là

- (A) 4.                      (B) 3.                      (C) 2.                      (D) 1.

**Câu 7.9.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có bảng biến thiên như hình vẽ.

$x$	$-\infty$	$-1$	$3$	$+\infty$		
$y'$		$+$	$0$	$-$	$0$	$+$
$y$		$5$		$1$	$+\infty$	

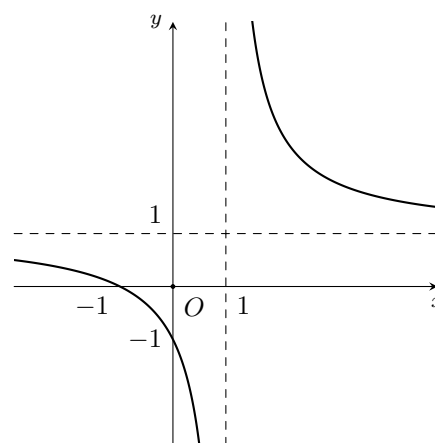
Phương trình  $f(x) - 2 = 0$  có bao nhiêu nghiệm?

- (A) 1.                      (B) 3.                      (C) 2.                      (D) 0.

**Câu 7.10.**

Cho hàm số  $f(x) = \frac{ax + b}{cx + d}$  có đồ thị như hình bên. Tìm tọa độ giao điểm của đồ thị hàm số bên với đường thẳng  $y = -1$ .

- (A) (0; 1).              (B) (0; -1).              (C) (-1; -1).              (D) (-1; 0).



**Câu 7.11.** Giao điểm của đồ thị hàm số  $y = \frac{2x + 1}{x + 1}$  với trục hoành là điểm

- (A)  $N\left(-\frac{1}{2}; 0\right)$ .              (B)  $P\left(\frac{1}{2}; 0\right)$ .              (C)  $Q(-1; 0)$ .              (D)  $M(0; 1)$ .

**Câu 7.12.** Cho hàm số  $y = x^3 - 3x$  có đồ thị (C). Tìm số giao điểm của (C) và trục hoành.

- (A) 3.                      (B) 1.                      (C) 0.                      (D) 2.

**Câu 7.13.** Đồ thị hàm số  $y = (x^2 - 1)(x^2 + 1)$  cắt trục hoành tại bao nhiêu điểm phân biệt?

- (A) 1.                      (B) 2.                      (C) 0.                      (D) 4.

**Câu 7.14.** Đường thẳng  $y = x - 1$  cắt đồ thị hàm số  $y = x^3 - x^2 + x - 1$  tại hai điểm phân biệt. Tìm tổng tung độ các giao điểm đó.

- (A) 2.                      (B) -1.                      (C) -3.                      (D) 0.

**Câu 7.15.** Tính tổng hoành độ của các giao điểm của đồ thị hàm số  $y = \frac{5x + 6}{x + 2}$  và đường thẳng  $y = -x$ .

- (A) -5.                      (B) -7.                      (C) 5.                      (D) 7.

**Câu 7.16.** Đồ thị của hàm số  $y = 4x^4 - 2x^2 + 1$  và đồ thị của hàm số  $y = x^2 + x + 1$  có tất cả bao nhiêu điểm chung?

- (A) 4.                      (B) 1.                      (C) 2.                      (D) 3.

**Câu 7.17.** Trong các điểm sau điểm nào là giao điểm của đồ thị hàm số  $y = x + \frac{2}{x - 1}$  và đường thẳng  $y = 2x$ .

- (A) (2; -4).                      (B) (-2; -2).                      (C) (-1; 2).                      (D) (2; 4).

**Câu 7.18.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có bảng biến thiên như hình vẽ.

$x$	$-\infty$	0	1	$+\infty$	
$y'$	-		+	0	-
$y$	$-\infty$	2	$+\infty$	-4	$+\infty$

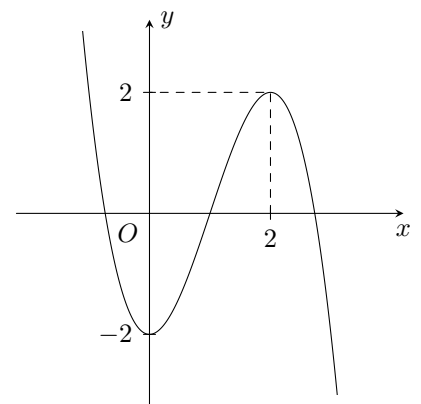
Tìm số nghiệm thực của phương trình  $f(x) - 1 = 0$ ?

- (A) 3.                      (B) 1.                      (C) 2.                      (D) 0.

**Câu 7.19.**

Cho hàm số  $y = f(x)$  có đồ thị trong hình bên. Phương trình  $f(x) - 1 = 0$  có bao nhiêu nghiệm thực phân biệt nhỏ hơn 2?

- (A) 1.                      (B) 2.                      (C) 3.                      (D) 0.

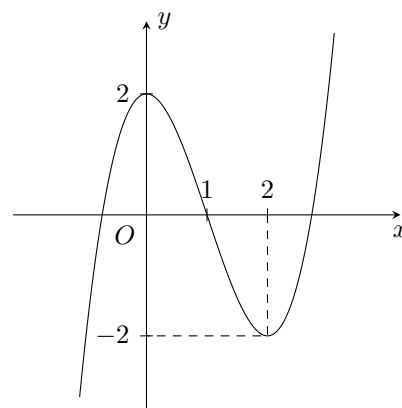


**Câu 7.20.**

Cho hàm số  $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$  có đồ thị như hình bên.

Phương trình  $3f(x) - 2 = 0$  có bao nhiêu nghiệm lớn hơn 1?

- (A) 3.            (B) 0.            (C) 1.            (D) 2.



**D BẢNG ĐÁP ÁN**

7.1. A	7.2. C	7.3. A	7.4. D	7.5. D	7.6. A	7.7. C	7.8. C
7.9. C	7.10. B	7.11. A	7.12. A	7.13. B	7.14. B	7.15. B	7.16. D
7.17. D	7.18. A	7.19. B	7.20. C				

## DẠNG 8. TÍNH CHẤT TÍCH PHÂN

### A KIẾN THỨC CẦN NHỚ

#### 1. Định nghĩa

Cho hàm số  $f(x)$  liên tục trên đoạn  $[a; b]$ . Giả sử  $F(x)$  là một nguyên hàm của hàm số  $f(x)$  trên đoạn  $[a; b]$ , hiệu số  $F(b) - F(a)$  được gọi là tích phân từ  $a$  đến  $b$  (hay tích phân xác định trên đoạn  $[a; b]$ ) của hàm số  $f(x)$ .

Kí hiệu  $\int_a^b f(x)dx$ .

#### 2. Các tính chất

$$\bullet \int_a^a f(x)dx = 0.$$

$$\bullet \int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(u)du = \dots$$

$$\bullet \int_a^b kf(x)dx = k \int_a^b f(x)dx \text{ (với } k \text{ là hằng số).}$$

$$\bullet \int_a^b f(x)dx = - \int_b^a f(x)dx.$$

$$\bullet \int_a^b [f(x) \pm g(x)] dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx.$$

$$\bullet \int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \text{ (với } a < b < c).$$

### B BÀI TẬP MẪU

#### CÂU 8 (ĐỀ minh họa BGD 2022-2023).

Nếu  $\int_{-1}^4 f(x)dx = 2$  và  $\int_{-1}^4 g(x)dx = 3$  thì  $\int_{-1}^4 [f(x) + g(x)] dx$  bằng

(A) 5.

(B) 6.

(C) 1.

(D) 7.

### C BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ PHÁT TRIỂN

**Câu 8.1.** Biết  $\int_0^1 f(x)dx = \frac{1}{3}$  và  $\int_0^1 g(x)dx = \frac{4}{3}$ . Khi đó  $\int_0^1 [f(x) - g(x)] dx$  bằng

- (A)  $\frac{5}{3}$ .                      (B)  $-1$ .                      (C)  $1$ .                      (D)  $-\frac{5}{3}$ .

**Câu 8.2.** Cho  $I = \int_1^5 f(x)dx = 4$ ,  $J = \int_1^5 g(x)dx = 3$ . Khi đó  $K = \int_1^5 [4f(x) - 3g(x)] dx$  bằng

- (A) 4.                      (B) 2.                      (C) 7.                      (D) 8.

**Câu 8.3.** Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên  $[a; b]$ , nếu  $\int_a^d f(x)dx = 5$  và  $\int_b^d f(x)dx = 2$  với  $a < d < b$  thì  $\int_a^b f(x)dx$  bằng

- (A) 10.                      (B) 3.                      (C) 7.                      (D)  $\frac{5}{2}$ .

**Câu 8.4.** Cho hàm số  $f(x)$ ,  $g(x)$  liên tục trên  $K$  và  $a, b, c$  thuộc  $K$ . Công thức nào sau đây sai?

(A)  $\int_a^b [f(x) + g(x)] dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx.$

(B)  $\int_a^b kf(x)dx = k \int_a^b f(x)dx.$

(C)  $\int_a^b f(x)dx = \int_b^a f(x)dx.$

(D)  $\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx.$

**Câu 8.5.** Cho  $\int_1^0 f(x)dx = 3$  và  $\int_0^1 g(x)dx = -4$ . Giá trị của  $\int_0^1 [f(x) - 2g(x)] dx$  bằng

- (A) 11.                      (B) 7.                      (C)  $-1$ .                      (D) 5.

**Câu 8.6.** Cho hàm số  $y = f(x)$  thỏa mãn  $\int_1^2 f(x)dx = -3$  và  $\int_2^3 f(x)dx = 4$ . Khi đó  $\int_1^3 f(x)dx$  bằng

- (A) 12.                      (B)  $-12$ .                      (C) 1.                      (D) 7.

**Câu 8.7.** Biết  $\int_0^1 f(x)dx = 3$ , khi đó  $\int_0^1 [4x - 3f(x)] dx$  bằng

- (A)  $-9$ .                      (B)  $-7$ .                      (C)  $-5$ .                      (D) 11.

**Câu 8.8.** Biết  $\int_0^1 f(x)dx = 2$ ,  $\int_0^1 g(x)dx = -4$ . Khi đó  $\int_0^1 [f(x) + 2g(x)] dx$  bằng

- (A)  $-6$ .                      (B) 6.                      (C)  $-2$ .                      (D) 2.

**Câu 8.9.** Cho hai số thực  $a; b$  tùy ý,  $F(x)$  là một nguyên hàm của hàm số  $f(x)$  trên tập  $\mathbb{R}$ . Mệnh đề nào sau đây đúng?

(A)  $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$

(B)  $\int_a^b f(x)dx = F(a) - F(b).$

(C)  $\int_a^b f(x)dx = F(b) + F(a).$

(D)  $\int_a^b f(x)dx = f(b) - f(a).$

**Câu 8.10.** Cho  $\int_{-1}^2 f(x)dx = 2$  và  $\int_{-1}^2 g(x)dx = -1$ . Giá trị của  $\int_{-1}^2 [2f(x) + 3g(x)] dx$  bằng

(A) -7.

(B) 1.

(C) 5.

(D) 7.

**Câu 8.11.** Nếu  $\int_{-1}^3 f(x)dx = 2$  và  $\int_{-1}^3 g(x)dx = -1$  thì  $\int_{-1}^3 [f(x) - g(x)] dx$  bằng

(A) 3.

(B) 4.

(C) -3.

(D) -1.

**Câu 8.12.** Cho  $\int_0^1 f(x)dx = 2$  và  $\int_0^1 g(x)dx = 5$ , khi đó  $\int_0^1 [3f(x) - 2g(x)] dx$  bằng:

(A) 11.

(B) -4.

(C) 16.

(D) -3.

**Câu 8.13.** Nếu  $\int_0^2 f(x)dx = 3$  và  $\int_0^2 g(x)dx = -2$  thì  $\int_0^2 [f(x) - g(x)] dx$  bằng

(A) 5.

(B) 1.

(C) -1.

(D) -5.

**Câu 8.14.** Cho hàm số  $f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  và có  $\int_0^2 f(x)dx = 9$ ;  $\int_2^4 f(x)dx = 4$ . Tính  $I =$

$\int_0^4 f(x)dx.$

(A)  $I = 5.$

(B)  $I = \frac{9}{4}.$

(C)  $I = 36.$

(D)  $I = 13.$

**Câu 8.15.** Cho  $\int_{-2}^3 f(x)dx = -4$  và  $\int_1^3 f(x)dx = 2$ . Khi đó  $\int_{-2}^1 f(x)dx$  bằng

(A) -2.

(B) 6.

(C) -8.

(D) -6.

**Câu 8.16.** Cho  $f(x), g(x)$  là các hàm số liên tục trên  $\mathbb{R}$ . Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào sai?

(A)  $\int f(x)g(x)dx = \int f(x)dx \cdot \int g(x)dx.$

(B)  $\int [f(x) + g(x)] dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx.$

(C)  $\int [f(x) - g(x)] dx = \int f(x)dx - \int g(x)dx.$

(D)  $\int 2f(x)dx = 2 \int f(x)dx.$

**Câu 8.17.** Cho hàm số  $f(x)$  có đạo hàm liên tục trên đoạn  $[2; 4]$  và thỏa mãn  $f(2) = 2, f(4) = 2020$ . Tính  $I = \int_1^2 f'(2x)dx.$

(A)  $I = 1009.$

(B)  $I = 2018.$

(C)  $I = 2022.$

(D)  $I = 1011.$

**Câu 8.18.** Cho  $\int_1^3 f(x)dx = 18$ . Khi đó  $\int_1^3 [5 - 2f(x)] dx$  bằng

- (A) -26.                      (B) 16.                      (C) -31.                      (D) -46.

**Câu 8.19.** Cho  $\int_0^2 f(x)dx = 3$  và  $\int_0^2 g(x)dx = 7$ , khi đó  $\int_0^2 [f(x) + 3g(x)] dx$  bằng

- (A) 10.                      (B) 16.                      (C) -18.                      (D) 24.

**Câu 8.20.** Cho  $\int_1^5 f(x)dx = 5$ ,  $\int_4^5 f(u)du = 2$  và  $\int_1^4 g(x)dx = 3$ . Tính  $I = \int_1^4 [f(x) + g(x)] dx$ .

- (A)  $I = 5$ .                      (B)  $I = 10$ .                      (C)  $I = 3$ .                      (D)  $I = 6$ .

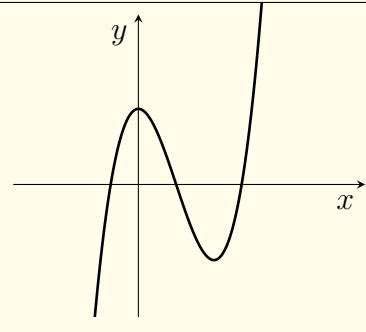
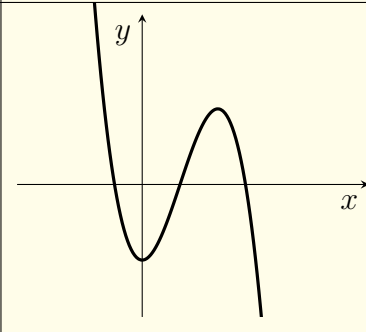
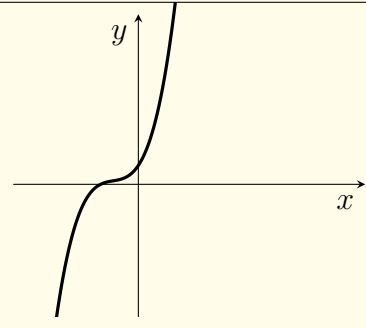
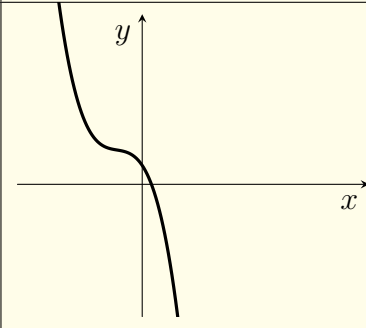
### **D BẢNG ĐÁP ÁN**

8.1. B	8.2. C	8.3. B	8.4. C	8.5. D	8.6. C	8.7. B	8.8. A
8.9. A	8.10. B	8.11. A	8.12. B	8.13. A	8.14. D	8.15. D	8.16. A
8.17. A	8.18. A	8.19. D	8.20. D				

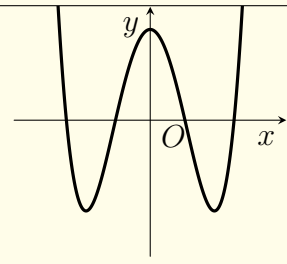
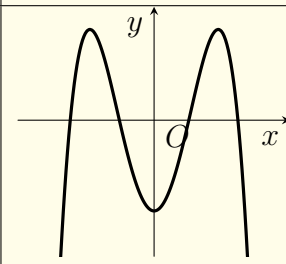
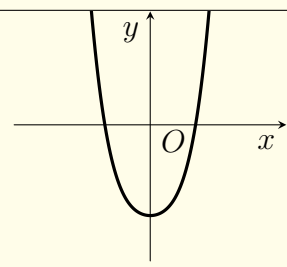
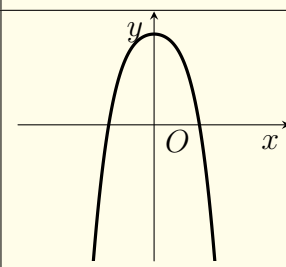
## DẠNG 9. NHẬN DẠNG ĐỒ THỊ HÀM SỐ

### A KIẾN THỨC CẦN NHỚ

#### 1. Hàm số bậc 3: $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ( $a \neq 0$ )

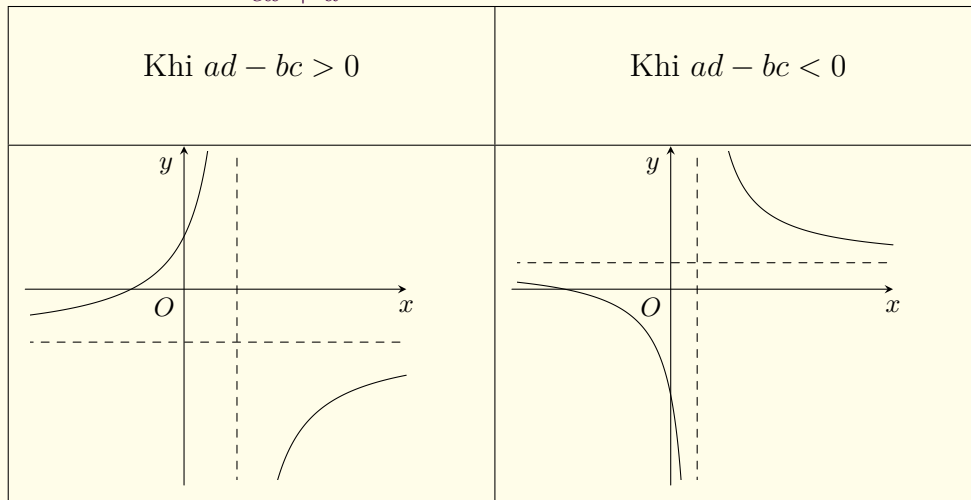
Trường hợp	$a > 0$	$a < 0$
$y' = 0$ có 2 nghiệm phân biệt ( $b^2 - 3ac > 0$ )		
$y' = 0$ có nghiệm kép hoặc vô nghiệm ( $b^2 - 3ac \leq 0$ )		

#### 2. Hàm số trùng phương $y = ax^4 + bx^2 + c$ ( $a \neq 0$ )

Trường hợp	$a > 0$	$a < 0$
Phương trình $y' = 0$ có 3 nghiệm phân biệt ( $a.b < 0$ )		
Phương trình $y' = 0$ có 1 nghiệm ( $a.b \geq 0$ )		



**3. Hàm số nhất biến**  $y = \frac{ax + b}{cx + d}, (ab - bc \neq 0)$



**B BÀI TẬP MẪU**

**CÂU 9 (De Tham khảo BGD 2023).**

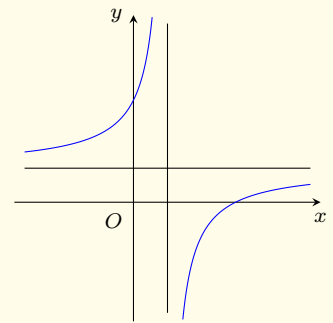
Đồ thị của hàm số nào dưới đây có dạng như đường cong trong hình bên

(A)  $y = x^4 - 3x^2 + 2.$

(B)  $y = \frac{x - 3}{x - 1}.$

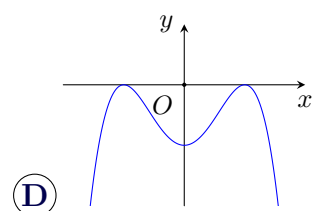
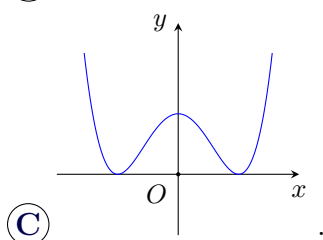
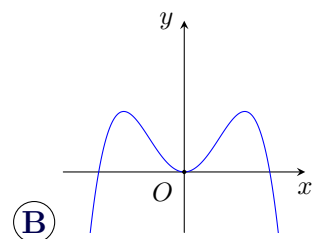
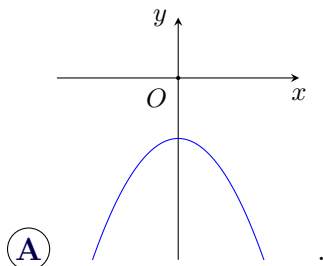
(C)  $y = x^2 - 4x + 1.$

(D)  $y = x^3 - 3x - 5.$



**C BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ PHÁT TRIỂN**

**Câu 9.1.** Đồ thị hàm số  $y = -x^4 + 2x^2$  là hình nào sau đây?



**Câu 9.2.**

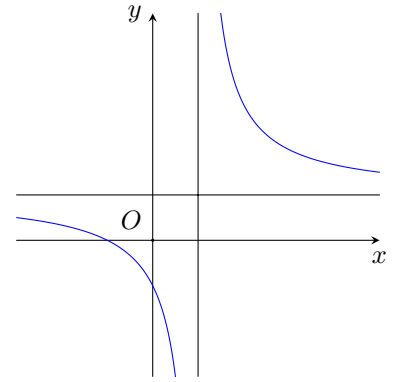
Đường cong ở hình vẽ bên là đồ thị của hàm số nào dưới đây?

(A)  $y = \frac{x-1}{x+1}$ .

(B)  $y = x^3 - 3x^2 - 1$ .

(C)  $y = -x^3 + 3x + 1$ .

(D)  $y = \frac{x+1}{x-1}$ .



**Câu 9.3.**

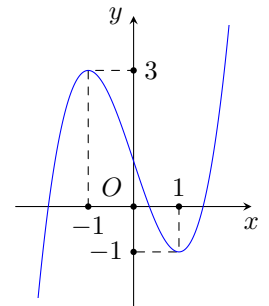
Đồ thị sau đây là của hàm số nào?

(A)  $y = -x^3 + 3x^2 + 1$ .

(B)  $y = x^3 - 3x + 1$ .

(C)  $y = -x^3 - 3x^2 - 1$ .

(D)  $y = x^3 - 3x - 1$ .



**Câu 9.4.**

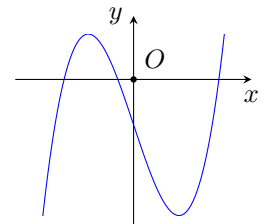
Đường cong trong hình vẽ bên là đồ thị của hàm số nào dưới đây?

(A)  $y = x^3 - 3x - 1$ .

(B)  $y = x^4 - 3x^2 - 1$ .

(C)  $y = -x^3 - 3x - 1$ .

(D)  $y = -x^4 + x^2 - 1$ .



**Câu 9.5.**

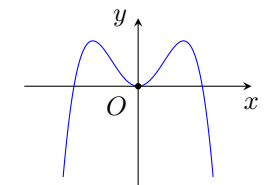
Đường cong trong hình vẽ bên là đồ thị của hàm số nào dưới đây?

(A)  $y = -x^3 + 3x^2$ .

(B)  $y = x^4 + 2x^2$ .

(C)  $y = x^3 - 3x^2$ .

(D)  $y = -x^4 + 2x^2$ .



**Câu 9.6.**

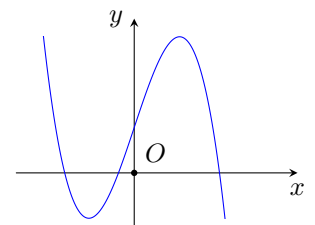
Đường cong trong hình vẽ bên là đồ thị của hàm số nào dưới đây?

(A)  $y = x^4 - 2x^2 + 1$ .

(B)  $y = -x^4 + 2x^2 + 1$ .

(C)  $y = -x^3 + 3x + 1$ .

(D)  $y = x^3 - 3x + 1$ .



**Câu 9.7.**

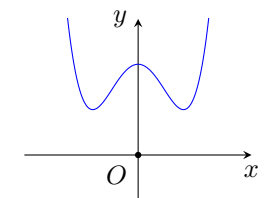
Đường cong trong hình vẽ bên là đồ thị của hàm số nào dưới đây?

(A)  $y = x^4 - 2x^2 + 2$ .

(B)  $y = x^3 - x^2 + 2$ .

(C)  $y = x^3 - x + 2$ .

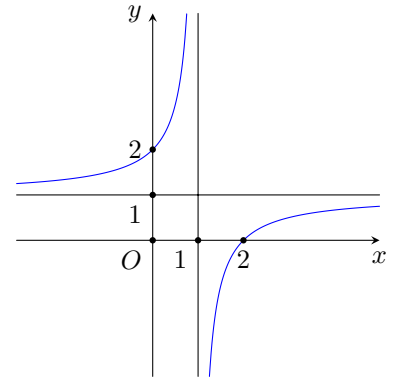
(D)  $y = -x^4 + x^2 + 2$ .



**Câu 9.8.**

Đường cong ở hình vẽ bên là đồ thị của hàm số nào dưới đây?

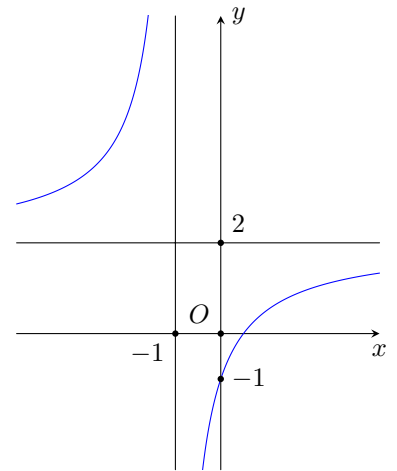
- A  $y = \frac{x-2}{x+1}$    
  B  $y = \frac{x+2}{x-1}$    
  C  $y = \frac{x+2}{x-2}$    
  D  $y = \frac{x-2}{x-1}$



**Câu 9.9.**

Đường cong ở hình vẽ bên là đồ thị của hàm số nào dưới đây?

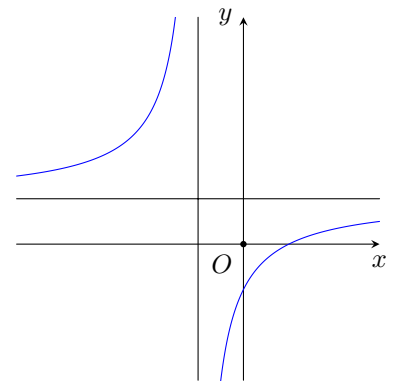
- A  $y = \frac{1-2x}{x+1}$    
  B  $y = \frac{2x+1}{x+1}$   
 C  $y = \frac{2x+1}{x-1}$    
  D  $y = \frac{2x-1}{x+1}$



**Câu 9.10.**

Đường cong ở hình vẽ bên là đồ thị của hàm số nào dưới đây?

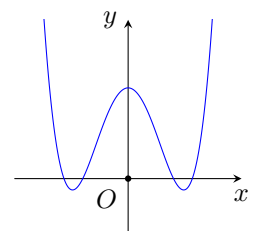
- A  $y = \frac{x+2}{x+1}$    
  B  $y = x^3 - 3x^2 + 1$   
 C  $y = \frac{x-1}{x+1}$    
  D  $y = -x^4 + 2x^2 + 1$



**Câu 9.11.**

Đồ thị của hàm số nào dưới đây có dạng đường cong như hình vẽ?

- A  $y = x^3 - 2x^2 - 2$    
  B  $y = x^3 - 3x^2 + 2$   
 C  $y = -x^4 + 3x^2 + 2$    
  D  $y = x^4 - 3x^2 + 2$

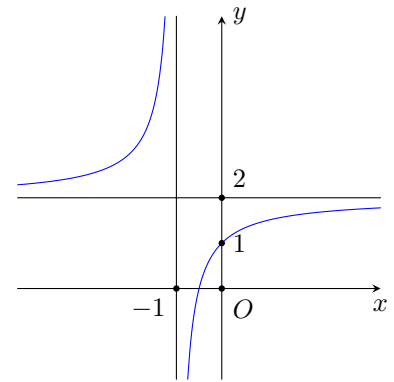


**Câu 9.12.**

Đường cong ở hình vẽ bên là đồ thị của hàm số nào dưới đây?

(A)  $y = \frac{x-1}{x+1}$   
 (C)  $y = \frac{2x+1}{x+1}$

(B)  $y = \frac{x+2}{x+1}$   
 (D)  $y = \frac{x+3}{1-x}$

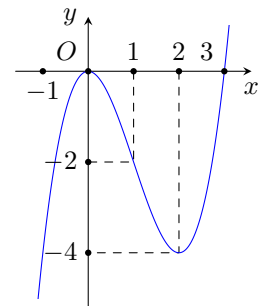


**Câu 9.13.**

Đồ thị sau đây là của hàm số nào?

(A)  $y = x^3 + 3x^2$   
 (C)  $y = x^3 - 3x^2$

(B)  $y = x^3 + 3x$   
 (D)  $y = x^3 - 3x$



**Câu 9.14.**

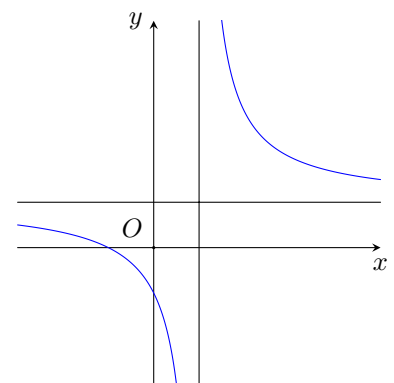
Đường cong ở hình vẽ bên là đồ thị của hàm số nào dưới đây?

(A)  $y = \frac{x+1}{x-1}$

(B)  $y = x^4 + x^2 + 1$

(C)  $y = x^3 - 3x - 1$

(D)  $y = \frac{2x-1}{x-1}$



**Câu 9.15.**

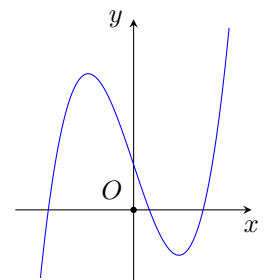
Đường cong trong hình vẽ bên là đồ thị của hàm số nào dưới đây?

(A)  $y = -x^3 + 3x + 1$

(B)  $y = x^4 - 3x^2 + 1$

(C)  $y = x^3 - 3x + 1$

(D)  $y = x^2 - 3x + 1$



**Câu 9.16.**

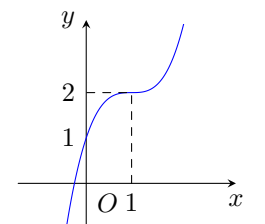
Hình vẽ bên là đồ thị của hàm số nào?

(A)  $y = x^3 - 3x + 1$

(B)  $y = x^4 - 2x^2 + 3$

(C)  $y = x^3 - 3x^2 + 3x + 1$

(D)  $y = -x^3 - 3x^2 - 1$



**Câu 9.17.** Hàm số nào sau đây có bảng biến thiên như hình dưới?

$x$	$-\infty$	$-1$	$1$	$+\infty$			
$f'(x)$		$+$	$0$	$-$	$0$	$+$	
$f(x)$	$-\infty$		$2$		$-2$		$+\infty$

(A)  $y = -x^3 + 3x^2 + 1.$

(B)  $y = -x^3 + 3x.$

(C)  $y = x^3 - 3x^2 - 1.$

(D)  $y = x^3 - 3x.$

**Câu 9.18.** Hàm số nào sau đây có bảng biến thiên như hình dưới?

$x$	$-\infty$	$-1$	$1$	$+\infty$			
$f'(x)$		$-$	$0$	$+$	$0$	$-$	
$f(x)$	$+\infty$		$0$		$4$		$-\infty$

(A)  $y = x^4 - 2x^2 - 3.$     (B)  $y = -x^3 + 3x + 2.$     (C)  $y = x^3 - 3x + 4.$     (D)  $y = \frac{x - 1}{2x - 1}.$

**Câu 9.19.** Hàm số nào sau đây có bảng biến thiên như hình dưới?

$x$	$-\infty$	$-1$	$0$	$1$	$+\infty$				
$f'(x)$		$-$	$0$	$+$	$0$	$-$			
$f(x)$	$+\infty$		$-4$		$-3$		$-4$		$-\infty$

(A)  $y = 2|x^3| - 3x^2 - 3.$

(B)  $y = 2x^4 - 4x^2 - 3.$

(C)  $y = 2|x^3| - 3|x| - 3.$

(D)  $y = \frac{1}{2}x^4 - x^2 - 3.$

**Câu 9.20.** Hàm số nào sau đây có bảng biến thiên như hình dưới?

$x$	$-\infty$	$-1$	$+\infty$				
$f'(x)$		$-$	$-$				
$f(x)$	$-2$		$-\infty$		$-\infty$		$-2$

(A)  $y = \frac{-2x + 3}{x + 1}.$

(B)  $y = \frac{-2x - 4}{x + 1}.$

(C)  $y = \frac{x - 4}{2x + 2}.$

(D)  $y = \frac{2 - x}{x + 1}.$

## **D** BẢNG ĐÁP ÁN

9.1. B	9.2. D	9.3. B	9.4. A	9.5. D	9.6. C	9.7. A	9.8. D
9.9. D	9.10. C	9.11. D	9.12. C	9.13. C	9.14. A	9.15. C	9.16. C
9.17. D	9.18. B	9.19. A	9.20. A				

## DẠNG 10. PHƯƠNG TRÌNH MẶT CẦU

### A KIẾN THỨC CẦN NHỚ

- Mặt cầu  $(S): (x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2$  có tâm  $I(a; b; c)$ , bán kính  $R$ .
- Mặt cầu  $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$  (với  $a^2 + b^2 + c^2 - d > 0$ ) có tâm  $I(a; b; c)$ , bán kính  $R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d}$ .

### B BÀI TẬP MẪU

#### CÂU 10 (ĐỀ minh họa BGD 2022-2023).

Trong không gian  $Oxyz$ , cho mặt cầu  $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 6z + 1 = 0$ . Tâm của  $(S)$  có tọa độ là

- A  $(-1; -2; -3)$ .     
  B  $(2; 4; 6)$ .     
  C  $(-2; -4; -6)$ .     
  D  $(1; 2; 3)$ .

### C BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ PHÁT TRIỂN

**Câu 10.1.** Trong không gian  $Oxyz$ , tâm của mặt cầu  $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y + 6z - 2 = 0$  là

- A  $B(-2; 1; 3)$ .     
  B  $D(2; -1; -3)$ .     
  C  $A(-4; 2; 6)$ .     
  D  $C(4; -2; -6)$ .

**Câu 10.2.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho mặt cầu  $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 6y - 8z - 10 = 0$ . Bán kính  $R$  của mặt cầu  $(S)$  là

- A  $R = 36$ .     
  B  $R = \sqrt{6}$ .     
  C  $R = \sqrt{114}$ .     
  D  $R = 6$ .

**Câu 10.3.** Trong không gian  $Oxyz$ , mặt cầu  $(S): (x + 4)^2 + (y - 5)^2 + (z + 6)^2 = 9$  có tâm và bán kính lần lượt là

- A  $I(4; -5; 6), R = 81$ .     
  B  $I(-4; 5; -6), R = 81$ .  
 C  $I(4; -5; 6), R = 3$ .     
  D  $I(-4; 5; -6), R = 3$ .

**Câu 10.4.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho mặt cầu  $(S): (x - 1)^2 + (y + 3)^2 + (z - 4)^2 = 4$ . Tìm tọa độ tâm  $I$  và bán kính  $R$  của mặt cầu  $(S)$  là

- A  $I(1; -3; 4), R = 4$ .     
  B  $I(-1; 3; -4), R = 4$ .  
 C  $I(-1; 3; -4), R = 2$ .     
  D  $I(1; -3; 4), R = 2$ .

**Câu 10.5.** Trong không gian  $Oxyz$ , mặt cầu  $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 2z - 10 = 0$  có bán kính bằng

- A 6.     
  B 3.     
  C 4.     
  D 5.

**Câu 10.6.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho mặt cầu  $(S): (x - 2)^2 + (y + 4)^2 + (z - 1)^2 = 9$ . Tâm của  $(S)$  có tọa độ là

- Ⓐ  $(2; 4; 1)$ .      Ⓑ  $(-2; -4; -1)$ .      Ⓒ  $(-2; 4; -1)$ .      Ⓓ  $(2; -4; 1)$ .

**Câu 10.7.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho mặt cầu  $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 6y - 8z - 3 = 0$ . Tâm của  $(S)$  có tọa độ là

- Ⓐ  $(4; -6; 8)$ .      Ⓑ  $(2; -3; 4)$ .      Ⓒ  $(-4; 6; -8)$ .      Ⓓ  $(-2; 3; -4)$ .

**Câu 10.8.** Trong không gian  $Oxyz$ , mặt cầu  $(S): (x + 1)^2 + (y - 2)^2 + (z + 3)^2 = 4$  có tâm và bán kính lần lượt là

- Ⓐ  $I(-1; 2; -3), R = 2$ .      Ⓑ  $I(1; -2; 3), R = 2$ .  
 Ⓒ  $I(1; -2; 3), R = 4$ .      Ⓓ  $I(-1; 2; -3), R = 4$ .

**Câu 10.9.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho mặt cầu  $(S): (x - 1)^2 + (y - 2)^2 + z^2 = 16$ . Tâm của  $(S)$  có tọa độ là

- Ⓐ  $(1; -2; 0)$ .      Ⓑ  $(-1; 2; 0)$ .      Ⓒ  $(-1; -2; 0)$ .      Ⓓ  $(1; 2; 0)$ .

**Câu 10.10.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho mặt cầu  $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 6z - 2 = 0$ . Tọa độ tâm  $I$  của mặt cầu  $(S)$  là

- Ⓐ  $I(2; 4; 6)$ .      Ⓑ  $I(-2; -4; -6)$ .      Ⓒ  $I(1; 2; 3)$ .      Ⓓ  $I(-1; -2; -3)$ .

**Câu 10.11.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho mặt cầu  $(S): (x + 3)^2 + (y + 1)^2 + (z - 1)^2 = 2$ . Xác định tọa độ tâm của mặt cầu  $(S)$ .

- Ⓐ  $(-3; -1; 1)$ .      Ⓑ  $(3; -1; 1)$ .      Ⓒ  $(-3; 1; -1)$ .      Ⓓ  $(3; 1; -1)$ .

**Câu 10.12.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho mặt cầu  $(S): (x - 1)^2 + (y + 2)^2 + (z - 3)^2 = 9$ . Tâm  $I$  và bán kính  $R$  của mặt cầu là

- Ⓐ  $I(1; 2; 3), R = 3$ .      Ⓑ  $I(-1; 2; -3), R = 3$ .  
 Ⓒ  $I(1; -2; 3), R = 3$ .      Ⓓ  $I(1; 2; -3), R = 3$ .

**Câu 10.13.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho mặt cầu  $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 4y - 8z + 4 = 0$ . Tìm tọa độ tâm  $I$  và tính bán kính  $R$  của mặt cầu  $(S)$ .

- Ⓐ  $I(-3; 2; -4), R = 5$ .      Ⓑ  $I(3; -2; 4), R = 5$ .  
 Ⓒ  $I(-3; 2; -4), R = 25$ .      Ⓓ  $I(3; -2; 4), R = 25$ .

**Câu 10.14.** Trong không gian  $Oxyz$ , tâm của mặt cầu  $(S): x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4y + 6z - 1 = 0$  có tọa độ là

- Ⓐ  $(1; -2; 3)$ .      Ⓑ  $(2; -4; 6)$ .      Ⓒ  $(-2; 4; -6)$ .      Ⓓ  $(-1; 2; -3)$ .

**Câu 10.15.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho mặt cầu  $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y + 1 = 0$ . Tâm của mặt cầu  $(S)$  có tọa độ là

- Ⓐ  $(-1; 2; 0)$ .      Ⓑ  $(2; -1; 0)$ .      Ⓒ  $(1; -2; 0)$ .      Ⓓ  $(-2; 1; 0)$ .



**Câu 10.16.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho mặt cầu  $(S)$  có phương trình  $(S): x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 4y + 8z = 0$ . Tìm tọa độ tâm  $I$  và bán kính  $R$ .

- (A)  $I(2; -2; 4), R = 2\sqrt{6}$ .                       (B)  $I(-2; 2; -4), R = 24$ .  
 (C)  $I(2; -2; 4), R = 24$ .                       (D)  $I(-2; 2; -4), R = 2\sqrt{6}$ .

**Câu 10.17.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho mặt cầu  $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z - 12 = 0$ , gọi  $I(a; b; c)$  là tâm của mặt cầu  $(S)$ . Tính  $T = a + b - c$ .

- (A) 2.                       (B) -4.                       (C) 4.                       (D) 5.

**Câu 10.18.** Trong không gian  $Oxyz$ , tâm  $I$  của mặt cầu  $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 8x - 2y + 1 = 0$  có tọa độ là

- (A)  $I(4; 1; 0)$ .                       (B)  $I(4; -1; 0)$ .                       (C)  $I(-4; 1; 0)$ .                       (D)  $I(-4; -1; 0)$ .

**Câu 10.19.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho mặt cầu  $(S): (x - 1)^2 + (y + 2)^2 + (z + 3)^2 = 16$ . Tọa độ tâm  $I$  của  $(S)$  là

- (A)  $I(-1; -2; -3)$ .                       (B)  $I(-1; 2; 3)$ .                       (C)  $I(1; -2; -3)$ .                       (D)  $I(1; -2; 3)$ .

**Câu 10.20.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho mặt cầu  $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y + 6z + 10 = 0$  có bán kính  $R$  bằng

- (A)  $R = 1$ .                       (B)  $R = 2$ .                       (C)  $R = 3$ .                       (D)  $R = 4$ .

**BẢNG ĐÁP ÁN**

10.1. B	10.2. D	10.3. D	10.4. D	10.5. C	10.6. D	10.7. B	10.8. A
10.9. D	10.10.C	10.11.A	10.12.C	10.13.B	10.14.D	10.15.C	10.16.D
10.17.B	10.18.A	10.19.C	10.20.B				

## DẠNG 11. GÓC GIỮA HAI MẶT PHẪNG

### A KIẾN THỨC CẦN NHỚ

Trong không gian  $Oxyz$ , cho hai mặt phẳng  $(P): a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$  và  $(Q): a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$ . Khi đó

$$\cos((P), (Q)) = |\cos(\vec{n}_{(P)}, \vec{n}_{(Q)})| = \frac{|a_1 \cdot a_2 + b_1 \cdot b_2 + c_1 \cdot c_2|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2} \cdot \sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}}$$

Lưu ý:  $0^\circ \leq ((P), (Q)) \leq 90^\circ$ .

### B BÀI TẬP MẪU

#### CÂU 11 (Đề minh họa BGD 2022-2023).

Trong không gian  $Oxyz$ , góc giữa hai mặt phẳng  $(Oxy)$  và  $(Oyz)$  bằng

- (A)  $30^\circ$ .                      (B)  $45^\circ$ .                      (C)  $60^\circ$ .                      (D)  $90^\circ$ .

### C BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ PHÁT TRIỂN

**Câu 11.1.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho hai mặt phẳng  $(P): x - 2y - z + 1 = 0$  và  $(Q): x + y + 2z + 7 = 0$ . Tính góc giữa hai mặt phẳng đó.

- (A)  $30^\circ$ .                      (B)  $60^\circ$ .                      (C)  $45^\circ$ .                      (D)  $120^\circ$ .

**Câu 11.2.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho mặt phẳng  $(P): x - z - 3 = 0$ . Tính góc giữa  $(P)$  và mặt phẳng  $(Oxy)$ .

- (A)  $45^\circ$ .                      (B)  $90^\circ$ .                      (C)  $30^\circ$ .                      (D)  $60^\circ$ .

**Câu 11.3.** Trong không gian  $Oxyz$ , biết hình chiếu của  $O$  lên mặt phẳng  $(P)$  là  $H(2; -1; -2)$ . Số đo góc giữa mặt phẳng  $(P)$  với mặt phẳng  $(Q): x - y - 5 = 0$  là

- (A)  $90^\circ$ .                      (B)  $60^\circ$ .                      (C)  $45^\circ$ .                      (D)  $30^\circ$ .

**Câu 11.4.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho hai mặt phẳng  $(P): x - y - 6 = 0$  và  $(Q)$ . Biết rằng điểm  $H(2; -1; -2)$  là hình chiếu vuông góc của gốc tọa độ  $O(0; 0; 0)$  xuống mặt phẳng  $(Q)$ . Số đo góc giữa mặt phẳng  $(P)$  và mặt phẳng  $(Q)$  bằng

- (A)  $45^\circ$ .                      (B)  $60^\circ$ .                      (C)  $30^\circ$ .                      (D)  $90^\circ$ .

**Câu 11.5.** Trong không gian  $Oxyz$ , góc giữa mặt phẳng  $(\alpha): \sqrt{2}x + y + z - 5 = 0$  và mặt phẳng  $(Oxy)$  là

- (A)  $90^\circ$ .                      (B)  $30^\circ$ .                      (C)  $45^\circ$ .                      (D)  $60^\circ$ .

**Câu 11.6.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho điểm  $H(2; -1; -2)$  là hình chiếu vuông góc của gốc tọa độ  $O$  xuống mặt phẳng  $(P)$ , số đo góc giữa mặt  $(P)$  và mặt phẳng  $(Q): x - y - 11 = 0$  bằng bao nhiêu?

- (A)  $90^\circ$ .                      (B)  $60^\circ$ .                      (C)  $45^\circ$ .                      (D)  $30^\circ$ .

**Câu 11.7.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho hai mặt phẳng  $(P): x - 2y - z + 2 = 0$  và  $(Q): 2x - y + z + 1 = 0$ . Góc giữa  $(P)$  và  $(Q)$  là

- (A)  $120^\circ$ .                      (B)  $90^\circ$ .                      (C)  $30^\circ$ .                      (D)  $60^\circ$ .

**Câu 11.8.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho hai mặt phẳng  $(P): x + (m + 1)y - 2z + m = 0$  và  $(Q): 2x - y + 3 = 0$ , với  $m$  là tham số thực. Để  $(P)$  vuông góc với  $(Q)$  thì giá trị của  $m$  bằng bao nhiêu?

- (A)  $m = 3$ .                      (B)  $m = -1$ .                      (C)  $m = -5$ .                      (D)  $m = 1$ .

**Câu 11.9.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho mặt phẳng  $(P)$  đi qua các điểm  $A(-2; 0; 0)$ ,  $B(0; 3; 0)$ ,  $C(0; 0; -3)$ . Mặt phẳng  $(P)$  vuông góc với mặt phẳng nào trong các mặt phẳng sau?

- (A)  $3x - 2y + 2z + 6 = 0$ .                      (B)  $x - 2y - z - 3 = 0$ .  
(C)  $2x + 2y - z - 1 = 0$ .                      (D)  $x + y + z + 1 = 0$ .

**Câu 11.10.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho mặt phẳng  $x - my + z - 1 = 0$  ( $m \in \mathbb{R}$ ), mặt phẳng  $(Q)$  chứa trục  $Ox$  và qua điểm  $A(1; -3; 1)$ . Tìm số thực  $m$  để hai mặt phẳng  $(P)$ ,  $(Q)$  vuông góc.

- (A)  $m = -\frac{1}{3}$ .                      (B)  $m = \frac{1}{3}$ .                      (C)  $m = 3$ .                      (D)  $m = -3$ .

**Câu 11.11.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho mặt phẳng  $(P): x + 2y - 2z + 3 = 0$ , mặt phẳng  $(Q): x - 3y + 5z - 2 = 0$ . Cô-sin của góc giữa hai mặt phẳng  $(P)$ ,  $(Q)$  là

- (A)  $-\frac{5}{7}$ .                      (B)  $-\frac{\sqrt{35}}{7}$ .                      (C)  $\frac{5}{7}$ .                      (D)  $\frac{\sqrt{35}}{7}$ .

**Câu 11.12.** Trong không gian  $Oxyz$ , gọi  $\alpha$  là góc giữa hai mặt phẳng  $(P): x - \sqrt{3}y + 2z + 1 = 0$  và mặt phẳng  $(Oxy)$ . Khẳng định nào sau đây đúng?

- (A)  $\alpha = 30^\circ$ .                      (B)  $\alpha = 60^\circ$ .                      (C)  $\alpha = 90^\circ$ .                      (D)  $\alpha = 45^\circ$ .

**Câu 11.13.** Trong hệ tọa độ  $Oxyz$ , cho hai mặt phẳng  $(P): \frac{x-2}{3} + \frac{y-1}{2} + \frac{z-4}{-6} = 1$  và  $(Q): x + 2y + 3z + 7 = 0$ . Tính tan góc tạo bởi hai mặt phẳng đã cho.

- (A)  $\frac{3}{\sqrt{19}}$ .                      (B)  $\frac{3}{5\sqrt{19}}$ .                      (C)  $\frac{5}{3\sqrt{19}}$ .                      (D)  $\frac{3\sqrt{19}}{5}$ .

**Câu 11.14.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho mặt phẳng  $(P): x - 2y + 2z - 5 = 0$ . Xét mặt phẳng  $(Q): x + (2m - 1)z + 7 = 0$ , với  $m$  là tham số thực. Tìm tất cả giá trị của  $m$  để  $(P)$  tạo với  $(Q)$  góc  $\frac{\pi}{4}$ .

- (A)  $\begin{bmatrix} m = 1 \\ m = 4 \end{bmatrix}$ .                      (B)  $\begin{bmatrix} m = 2 \\ m = -2\sqrt{2} \end{bmatrix}$ .                      (C)  $\begin{bmatrix} m = 2 \\ m = 4 \end{bmatrix}$ .                      (D)  $\begin{bmatrix} m = 4 \\ m = \sqrt{2} \end{bmatrix}$ .

**Câu 11.15.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho hai mặt phẳng  $(\alpha): x + y + z - 1 = 0$  và  $(\beta): 2x - y + mz - m + 1 = 0$ , với  $m$  là tham số thực. Giá trị của  $m$  để  $(\alpha) \perp (\beta)$  là  
 (A) 1. (B) -4. (C) -1. (D) 0.

**Câu 11.16.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho mặt phẳng  $(\alpha): 2x - y + z - 3 = 0$  và  $(\beta): 3x - 4y + 5z = 0$ . Góc tạo bởi hai mặt phẳng  $(\alpha)$  và  $(\beta)$  bằng  
 (A)  $90^\circ$ . (B)  $30^\circ$ . (C)  $60^\circ$ . (D)  $45^\circ$ .

**Câu 11.17.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho hai mặt phẳng  $(P): x - y - 6 = 0$  và  $(Q)$ . Biết rằng điểm  $H(2; -1; -2)$  là hình chiếu vuông góc của gốc tọa độ  $O(0; 0; 0)$  xuống mặt phẳng  $(Q)$ . Số đo góc giữa mặt phẳng  $(P)$  và mặt phẳng  $(Q)$  bằng  
 (A)  $60^\circ$ . (B)  $45^\circ$ . (C)  $30^\circ$ . (D)  $90^\circ$ .

**Câu 11.18.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho hai mặt phẳng  $(P)$  và  $(Q)$  lần lượt có hai véc-tơ pháp tuyến là  $\vec{n}_{(P)}$  và  $\vec{n}_{(Q)}$ . Biết góc giữa hai véc-tơ  $\vec{n}_{(P)}$  và  $\vec{n}_{(Q)}$  bằng  $30^\circ$ . Góc giữa hai mặt phẳng  $(P)$  và  $(Q)$  bằng  
 (A)  $30^\circ$ . (B)  $45^\circ$ . (C)  $60^\circ$ . (D)  $90^\circ$ .

**Câu 11.19.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho hai mặt phẳng  $(P)$  và  $(Q)$  lần lượt có hai véc-tơ pháp tuyến là  $\vec{n}_{(P)}$  và  $\vec{n}_{(Q)}$ . Biết góc giữa hai véc-tơ  $\vec{n}_{(P)}$  và  $\vec{n}_{(Q)}$  bằng  $120^\circ$ . Góc giữa hai mặt phẳng  $(P)$  và  $(Q)$  bằng  
 (A)  $30^\circ$ . (B)  $45^\circ$ . (C)  $60^\circ$ . (D)  $90^\circ$ .

**Câu 11.20.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho hai mặt phẳng  $(P)$  và  $(Q)$  lần lượt có hai véc-tơ pháp tuyến là  $\vec{n}_{(P)}$  và  $\vec{n}_{(Q)}$ . Biết cô-sin góc giữa hai véc-tơ  $\vec{n}_{(P)}$  và  $\vec{n}_{(Q)}$  bằng  $\frac{1}{2}$ . Góc giữa hai mặt phẳng  $(P)$  và  $(Q)$  bằng  
 (A)  $30^\circ$ . (B)  $45^\circ$ . (C)  $60^\circ$ . (D)  $90^\circ$ .

**D BẢNG ĐÁP ÁN**

11.1. B	11.2. A	11.3. C	11.4. A	11.5. D	11.6. C	11.7. D	11.8. D
11.9. C	11.10. C	11.11. D	11.12. D	11.13. D	11.14. A	11.15. C	11.16. B
11.17. B	11.18. A	11.19. C	11.20. C				

# DẠNG 12. CÁC PHÉP TOÁN CƠ BẢN CỦA SỐ PHỨC

## A KIẾN THỨC CẦN NHỚ

### 1. Định nghĩa

a) Một số phức là một biểu thức dạng  $z = a + bi$  với  $a, b \in \mathbb{R}$  và  $i^2 = -1$ ,  $i$  được gọi là đơn vị ảo,  $a$  được gọi là phần thực và  $b$  được gọi là phần ảo của số phức  $z = a + bi$ .

b) Tập hợp các số phức được kí hiệu là  $\mathbb{C}$ ,  $\mathbb{C} = \{a + bi | a, b \in \mathbb{R}; i^2 = -1\}$ .

c) Chú ý

- Khi phần ảo  $b = 0 \Leftrightarrow z = a$  là số thực.
- Khi phần thực  $a = 0 \Leftrightarrow z = bi \Leftrightarrow z$  là số thuần ảo.
- Số  $0 = 0 + 0i$  vừa là số thực, vừa là số ảo.

d) Hai số phức bằng nhau  $a + bi = c + di \Leftrightarrow \begin{cases} a = c \\ b = d \end{cases}$  với  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ .

e) Hai số phức  $z_1 = a + bi; z_2 = -a - bi$  được gọi là hai số phức đối nhau.

### 2. Số phức liên hợp

Số phức liên hợp của  $z = a + bi$  với  $a, b \in \mathbb{R}$  là  $a - bi$  và được kí hiệu bởi  $\bar{z}$ . Rõ ràng  $\bar{\bar{z}} = z$

### 3. Biểu diễn hình học

Trong mặt phẳng phức  $Oxy$  ( $Ox$  là trục thực,  $Oy$  là trục ảo), số phức  $z = a + bi$  với  $a, b \in \mathbb{R}$  được biểu diễn bằng điểm  $M(a; b)$ .

### 4. Mô-đun của số phức

Mô-đun của số phức  $z = a + bi (a, b \in \mathbb{R})$  là  $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ .

### 5. Các phép toán trên tập số phức

Cho hai số phức  $z = a + bi; z' = a' + b'i$  với  $a, b, a', b' \in \mathbb{R}$  và số  $k \in \mathbb{R}$ .

a) Tổng hai số phức:  $z + z' = a + a' + (b + b')i$ .

b) Hiệu hai số phức:  $z - z' = a - a' + (b - b')i$ .

c) Nhân hai số phức:  $z \cdot z' = (a + bi)(a' + b'i) = (a \cdot a' - b \cdot b') + (a \cdot b' + a' \cdot b)i$ .

d) Chia 2 số phức:

- Số phức nghịch đảo:  $\frac{1}{z} = \frac{1}{|z|^2} \bar{z}$ .

- Nếu  $z \neq 0$  thì  $\frac{z'}{z} = \frac{z' \cdot \bar{z}}{|z|^2}$ , nghĩa là nếu muốn chia số phức  $z'$  cho số phức  $z \neq 0$  thì ta nhân cả tử và mẫu của thương  $\frac{z'}{z}$  cho  $\bar{z}$ .

## B BÀI TẬP MẪU

### CÂU 12 (ĐỀ MINH HỌA BGD 2022-2023).

Cho số phức  $z = 2 + 9i$ , phần thực của số phức  $z^2$  bằng

- (A)  $-77$ .                      (B)  $4$ .                      (C)  $36$ .                      (D)  $85$ .

## C BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ PHÁT TRIỂN

**Câu 12.1.** Số phức liên hợp của  $z = (2 + 4i) + (1 - 3i)i$  là

- (A)  $\bar{z} = -3 - i$ .                      (B)  $\bar{z} = 1 + 3i$ .                      (C)  $\bar{z} = 3 + i$ .                      (D)  $\bar{z} = 3 - i$ .

**Câu 12.2.** Tìm phần ảo của số phức  $\bar{z}$ , biết  $z = \frac{(1+i)3i}{1-i}$ .

- (A)  $0$ .                      (B)  $-1$ .                      (C)  $3$ .                      (D)  $-3$ .

**Câu 12.3.** Số phức liên hợp của số phức  $3 - 2i$  là

- (A)  $3 + 2i$ .                      (B)  $-3 - 2i$ .                      (C)  $-2 + 3i$ .                      (D)  $-3 + 2i$ .

**Câu 12.4.** Cho các số phức  $z_1 = 2 + 3i$ ,  $z_2 = 4 + 5i$ . Số phức liên hợp của số phức  $w = 2(z_2 - z_1)$  là

- (A)  $\bar{w} = 8 - 15i$ .                      (B)  $\bar{w} = 4 + 4i$ .                      (C)  $\bar{w} = 4 - 4i$ .                      (D)  $\bar{w} = 8 + 15i$ .

**Câu 12.5.** Cho số phức  $z = 4 - 2i$ . Phần ảo của số phức  $3 - 4z$  là

- (A)  $-4$ .                      (B)  $-8$ .                      (C)  $-2$ .                      (D)  $8$ .

**Câu 12.6.** Cho số phức  $z = 2 - 3i$ . Tìm mô-đun của số phức  $w = 2z + (1+i)\bar{z}$ .

- (A)  $|w| = \sqrt{10}$ .                      (B)  $|w| = 4$ .                      (C)  $|w| = \sqrt{15}$ .                      (D)  $|w| = \sqrt{2}$ .

**Câu 12.7.** Phần ảo của số phức  $z = (2 - 3i)^2 - (1 + i)^2$  là

- (A)  $-10$ .                      (B)  $-10i$ .                      (C)  $-14i$ .                      (D)  $-14$ .

**Câu 12.8.** Cho số phức  $z = -2 + xi$ , ( $x \in \mathbb{R}$ ) có mô-đun bằng

- (A)  $\sqrt{x^2 + 2}$ .                      (B)  $\sqrt{x^2 + 4}$ .                      (C)  $|x| + 2$ .                      (D)  $|2x|$ .

**Câu 12.9.** Cho hai số phức  $z_1 = 1 + 2i$  và  $z_2 = 2 - 3i$ . Phần ảo của số phức  $w = 3z_1 - 2z_2$  là

- (A)  $1$ .                      (B)  $11$ .                      (C)  $12$ .                      (D)  $12i$ .

**Câu 12.10.** Cho số phức  $z$  thỏa mãn  $z(2 - i) + 13i = 1$ . Tính mô-đun của số phức  $z$ .

- (A)  $|z| = \frac{5\sqrt{34}}{3}$ .                      (B)  $|z| = 34$ .                      (C)  $|z| = \sqrt{34}$ .                      (D)  $|z| = \frac{\sqrt{34}}{3}$ .

**Câu 12.11.** Cho số phức  $z = (1 + i)^2(1 + 2i)$ . Số phức  $z$  có phần ảo là

- (A)  $-4$ . (B)  $2i$ . (C)  $4$ . (D)  $2$ .

**Câu 12.12.** Tìm số phức liên hợp của số phức  $z = 3 + 2i$ .

- (A)  $\bar{z} = 3 - 2i$ . (B)  $\bar{z} = -3 - 2i$ . (C)  $\bar{z} = 2 - 3i$ . (D)  $\bar{z} = -2 - 3i$ .

**Câu 12.13.** Số phức  $z = 4 - 3i$  có mô-đun bằng

- (A)  $2\sqrt{2}$ . (B)  $25$ . (C)  $5$ . (D)  $8$ .

**Câu 12.14.** Cho số phức  $z = 5 - 4i$ . Số phức  $z - 2$  có

- (A) Phần thực bằng 5 và phần ảo bằng  $-4$ . (B) Phần thực bằng 3 và phần ảo bằng  $-4$ .  
(C) Phần thực bằng  $-4$  và phần ảo bằng 3. (D) Phần thực bằng 3 và phần ảo bằng  $-4i$ .

**Câu 12.15.** Cho số phức  $z_1 = 2 + 3i$  và  $z_2 = 1 - 2i$ . Số phức liên hợp của số phức  $w = z_1 + z_2$  là

- (A)  $\bar{w} = 3 + i$ . (B)  $\bar{w} = 3 - i$ . (C)  $\bar{w} = 3 - 2i$ . (D)  $\bar{w} = 1 - 4i$ .

**Câu 12.16.** Cho các số phức  $z_1 = 2 - 3i$ ,  $z_2 = 1 + 4i$ . Tìm số phức liên hợp với số phức  $z_1 z_2$ .

- (A)  $-14 - 5i$ . (B)  $-10 - 5i$ . (C)  $-10 + 5i$ . (D)  $14 - 5i$ .

**Câu 12.17.** Cho hai số phức  $z_1 = 1 + i$  và  $z_2 = 2 - 3i$ . Tính mô-đun của số phức  $z_1 + z_2$ .

- (A)  $|z_1 + z_2| = 5$ . (B)  $|z_1 + z_2| = \sqrt{13}$ . (C)  $|z_1 + z_2| = 1$ . (D)  $|z_1 + z_2| = \sqrt{5}$ .

**Câu 12.18.** Tìm số phức liên hợp của số phức  $z = (-3 - 4i)(2 + i) + 1 - 3i$ .

- (A)  $\bar{z} = -1 + 14i$ . (B)  $\bar{z} = 1 - 14i$ . (C)  $\bar{z} = 1 + 14i$ . (D)  $\bar{z} = -1 - 14i$ .

**Câu 12.19.** Cho hai số phức  $z_1 = 1 + i$  và  $z_2 = 2 - 3i$ . Tính mô-đun của  $z_1 + z_2$ .

- (A)  $|z_1 + z_2| = 1$ . (B)  $|z_1 + z_2| = \sqrt{5}$ . (C)  $|z_1 + z_2| = \sqrt{13}$ . (D)  $|z_1 + z_2| = 5$ .

**Câu 12.20.** Cho hai số phức  $z_1 = 3 + i$  và  $z_2 = 2 - 4i$ . Mô-đun của số phức  $z_1 z_2$  bằng

- (A)  $10$ . (B)  $10\sqrt{2}$ . (C)  $-10$ . (D)  $20$ .

## **D BẢNG ĐÁP ÁN**

12.1. D	12.2. A	12.3. A	12.4. C	12.5. D	12.6. A	12.7. D	12.8. B
12.9. C	12.10. C	12.11. D	12.12. A	12.13. C	12.14. B	12.15. B	12.16. D
12.17. B	12.18. A	12.19. C	12.20. B				

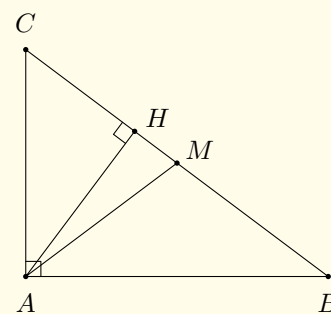
## DẠNG 13. TÍNH THỂ TÍCH KHỐI LĂNG TRỤ ĐỨNG

### A KIẾN THỨC CẦN NHỚ

a) Thể tích khối lăng trụ  $V = B \cdot h$  với  $B$ : diện tích đáy,  $h$ : chiều cao.

b) Các hệ thức lượng trong tam giác vuông.

Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$ , đường cao  $AH$ , trung tuyến  $AM$ . Khi đó



- $BC^2 = AB^2 + AC^2$ .
- $BH \cdot BC = AB^2$ ;  $CH \cdot CB = CA^2$ .
- $AB \cdot AC = AH \cdot BC$ ;  $AM = \frac{1}{2}BC$ .
- $CH \cdot BH = AH^2$ .
- $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2}$ .
- $\sin \widehat{ABC} = \frac{AC}{BC}$ ;  $\cos \widehat{ABC} = \frac{AB}{BC}$ ;  $\tan \widehat{ABC} = \frac{AC}{AB}$ ;  
 $\cot \widehat{ABC} = \frac{AB}{AC}$ .

c) Đường chéo của hình vuông cạnh  $a$  có độ dài bằng  $a\sqrt{2}$ .

d) Đường cao của tam giác đều cạnh  $a$  có độ dài bằng  $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ .

e) Diện tích tam giác bất kỳ

- $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h_a = \frac{1}{2} \cdot b \cdot h_b = \frac{1}{2} \cdot c \cdot h_c$ , trong đó  $h_a, h_b, h_c$  lần lượt là đường cao hạ từ các đỉnh  $A, B, C$  của tam giác  $ABC$ ;  $BC = a, AC = b, AB = c$ .
- $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot b \cdot c \cdot \sin A = \frac{1}{2} \cdot a \cdot c \cdot \sin B = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin C$ .
- $S_{\Delta ABC} = \frac{abc}{4R}$ , trong đó  $R$  là bán kính đường tròn ngoại tiếp  $\Delta ABC$ .
- $S_{\Delta ABC} = p \cdot r$ , trong đó  $r$  là bán kính đường tròn nội tiếp  $\Delta ABC$ .
- $S_{\Delta ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ , trong đó  $p = \frac{a+b+c}{2}$ .



f) Trường hợp đặc biệt

- Diện tích tam giác  $\triangle ABC$  vuông tại  $A$  là  $S = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC$ .
- Diện tích của tam giác đều cạnh  $a$  là  $S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ .

g) Diện tích hình chữ nhật  $S = a \cdot b$ , trong đó  $a, b$  lần lượt là chiều dài và chiều rộng của hình chữ nhật.

h) Diện tích hình vuông cạnh  $a$  là  $S = a^2$ .

i) Diện tích hình thoi  $S = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BD$ , trong đó  $AC$  và  $BD$  là hai đường chéo.

j) Diện tích hình thang  $S = \frac{(\text{đáy lớn} + \text{đáy bé}) \cdot h}{2}$ , trong đó  $h$  là chiều cao của hình thang.

k) Diện tích hình bình hành  $ABCD$  là  $S = AH \cdot CD$ , trong đó  $AH$  là chiều cao của tam giác  $ABD$ .

l) Định lí hàm số sin:  $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$ .

m) Định lí hàm số cosin

- $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A$ .
- $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos B$ .
- $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos C$ .

n) Công thức đường trung tuyến

$$\bullet m_a^2 = \frac{b^2 + c^2}{2} - \frac{a^2}{4} \quad \bullet m_b^2 = \frac{a^2 + c^2}{2} - \frac{b^2}{4} \quad \bullet m_c^2 = \frac{a^2 + b^2}{2} - \frac{c^2}{4}$$

## B BÀI TẬP MẪU

**CÂU 13 (Đề tham khảo 2023).** Cho khối lăng trụ có diện tích đáy  $B = 3$  và chiều cao  $h = 4$ .

Thể tích của khối lăng trụ đã cho bằng

(A) 4.

(B) 12.

(C) 8.

(D) 6.

## **BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ PHÁT TRIỂN**

**Câu 13.1.** Thể tích của khối hộp chữ nhật có độ dài các cạnh lần lượt là  $a, 2a, 3a$  bằng

- (A)  $3a^3$ .                      (B)  $2a^3$ .                      (C)  $6a^3$ .                      (D)  $\frac{2a^3}{3}$ .

**Câu 13.2.** Gọi  $h, S, V$  lần lượt là chiều cao, diện tích đáy và thể tích của hình lăng trụ. Chiều cao khối lăng trụ là

- (A)  $\frac{V}{S}$ .                      (B)  $\frac{S}{V}$ .                      (C)  $\frac{3V}{S}$ .                      (D)  $\frac{1}{3}SV$ .

**Câu 13.3.** Cho lăng trụ tứ giác  $ABCD.A'B'C'D'$  có đáy là hình vuông cạnh  $a$  và có thể tích bằng  $3a^3$ . Tính chiều cao  $h$  của lăng trụ đã cho.

- (A)  $h = a$ .                      (B)  $h = 3a$ .                      (C)  $h = 9a$ .                      (D)  $h = \frac{a}{3}$ .

**Câu 13.4.** Một khối lăng trụ có chiều cao bằng  $2a$  và diện tích đáy bằng  $2a^2$ . Thể tích khối lăng trụ đã cho bằng

- (A)  $V = \frac{2a^3}{3}$ .                      (B)  $V = 4a^3$ .                      (C)  $V = \frac{4a^3}{3}$ .                      (D)  $V = \frac{4a^2}{3}$ .

**Câu 13.5.** Thể tích khối lăng trụ có diện tích đáy bằng 4 và chiều cao bằng 3 là

- (A) 4.                      (B) 48.                      (C) 16.                      (D) 12.

**Câu 13.6.** Khối lăng trụ có diện tích đáy bằng  $24 \text{ cm}^2$ , chiều cao bằng 3 cm thì có thể tích bằng

- (A)  $8 \text{ cm}^3$ .                      (B)  $72 \text{ cm}^3$ .                      (C)  $126 \text{ cm}^3$ .                      (D)  $24 \text{ cm}^3$ .

**Câu 13.7.** Cho khối lăng trụ có diện tích đáy bằng  $4a^2$  và khoảng cách giữa hai đáy bằng  $a$ . Thể tích của khối lăng trụ đã cho bằng

- (A)  $4a^3$ .                      (B)  $\frac{1}{3}a^3$ .                      (C)  $3a^3$ .                      (D)  $a^3$ .

**Câu 13.8.** Khối lăng trụ có chiều cao bằng  $h$ , diện tích đáy bằng  $B$  có thể tích là

- (A)  $V = \frac{1}{3}B \cdot h$ .                      (B)  $V = \frac{1}{2}B \cdot h$ .                      (C)  $V = \frac{1}{6}B \cdot h$ .                      (D)  $V = B \cdot h$ .

**Câu 13.9.** Biết rằng thể tích của một khối lập phương bằng 8. Tính tổng diện tích các mặt của hình lập phương đó?

- (A) 36.                      (B) 27.                      (C) 16.                      (D) 24.

**Câu 13.10.** Khối lăng trụ có diện tích đáy bằng  $4 \text{ cm}^2$ , chiều cao bằng 2 cm có thể tích bằng

- (A)  $8 \text{ cm}^3$ .                      (B)  $\frac{8}{3} \text{ cm}^3$ .                      (C)  $4 \text{ cm}^3$ .                      (D)  $6 \text{ cm}^3$ .

**Câu 13.11.** Thể tích của khối lăng trụ có diện tích đáy  $a^2$  và chiều cao  $a$  là

- (A)  $a^3$ .                      (B)  $\frac{a^3}{3}$ .                      (C)  $3a^3$ .                      (D)  $2a^3$ .

**Câu 13.12.** Nếu một khối lăng trụ đứng có diện tích đáy bằng  $B$  và cạnh bên bằng  $h$  thì có thể tích là

- (A)  $Bh$ .                      (B)  $\frac{1}{3}Bh$ .                      (C)  $\frac{1}{2}Bh$ .                      (D)  $3Bh$ .

**Câu 13.13.** Cho hình lăng trụ  $ABC.A'B'C'$  có diện tích đáy là 15 và chiều cao của lăng trụ là 10. Thể tích khối lăng trụ  $ABC.A'B'C'$  là

- (A) 200.                      (B) 150.                      (C) 100.                      (D) 50.

**Câu 13.14.** Nếu cạnh của hình lập phương tăng lên gấp 2 lần thì thể tích của hình lập phương đó sẽ tăng lên bao nhiêu lần?

- (A) 9.                          (B) 8.                          (C) 6.                          (D) 4.

**Câu 13.15.** Thể tích của khối lăng trụ đứng tam giác đều có tất cả các cạnh bằng  $a$  bằng

- (A)  $\frac{a^3\sqrt{2}}{3}$ .                      (B)  $\frac{a^3}{3}$ .                      (C)  $\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$ .                      (D)  $\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$ .

**Câu 13.16.** Tính thể tích của khối lăng trụ tam giác đều có cạnh đáy bằng  $2a$  và cạnh bên bằng  $a$ .

- (A)  $\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$ .                      (B)  $a^3$ .                      (C)  $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$ .                      (D)  $a^3\sqrt{3}$ .

**Câu 13.17.** Tính thể tích  $V$  của khối lập phương  $ABCD \cdot A'B'C'D'$  biết  $AC' = 2a\sqrt{3}$ .

- (A)  $V = a^3$ .                      (B)  $V = 24\sqrt{3}a^3$ .                      (C)  $V = 8a^3$ .                      (D)  $V = 3\sqrt{3}a^3$ .

**Câu 13.18.** Cho lăng trụ đứng  $ABC.A'B'C'$  có đáy  $ABC$  là tam giác vuông tại  $A$ . Biết  $AB = a$ ,  $AC = 2a$ ,  $AA' = 3a$ . Thể tích khối lăng trụ đã cho bằng

- (A)  $3a^3$ .                      (B)  $6a^3$ .                      (C)  $a^3$ .                      (D)  $3a^2$ .

**Câu 13.19.** Thể tích của khối hộp chữ nhật  $ABCD.A'B'C'D'$  có các cạnh  $AB = 4$ ,  $AD = 5$  và  $AA' = 6$  là

- (A)  $V = 200$ .                      (B)  $V = 100$ .                      (C)  $V = 120$ .                      (D)  $V = 130$ .

**Câu 13.20.** Cho khối lăng trụ đứng  $ABCD.A'B'C'D'$  có đáy  $ABCD$  là hình thoi có độ dài hai đường chéo  $AC = 2a$  và  $BD = a$ , cạnh bên  $AA' = 3a$ . Thể tích  $V$  của khối lăng trụ đã cho là

- (A)  $V = 6a^3$ .                      (B)  $V = 12a^3$ .                      (C)  $V = 3a^3$ .                      (D)  $V = 2a^3$ .

### **(D) BẢNG ĐÁP ÁN**

13.1. C	13.2. A	13.3. B	13.4. B	13.5. D	13.6. B	13.7. A	13.8. D
13.9. D	13.10. A	13.11. A	13.12. A	13.13. B	13.14. B	13.15. C	13.16. D
13.17. C	13.18. A	13.19. C	13.20. C				

# DẠNG 14. THỂ TÍCH KHỐI CHÓP

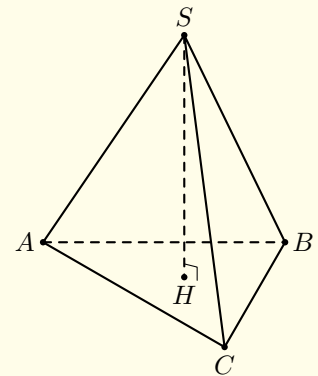
## A KIẾN THỨC CẦN NHỚ

### 1. Thể tích khối chóp

$$V = \frac{1}{3} \cdot B \cdot h.$$

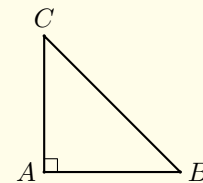
Trong đó:

- $B$  là diện tích đa giác đáy.
- $h$  là chiều cao khối chóp.

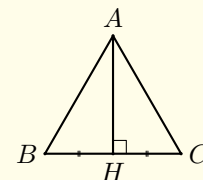


### 2. Diện tích đa giác

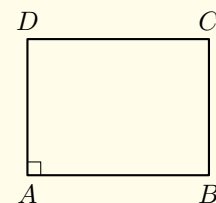
- Diện tích tam giác vuông:  $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC$ .



- Diện tích tam giác đều:  $S_{\triangle ABC} = \frac{AB^2 \sqrt{3}}{4}$ .

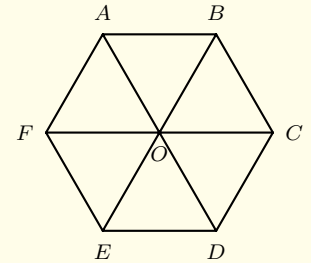
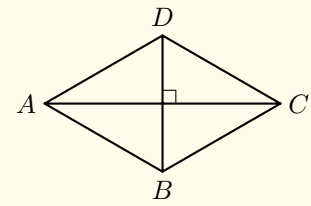


- Diện tích hình chữ nhật:  $S_{ABCD} = \frac{1}{2} AB \cdot AD$ .



• Diện tích hình thoi:  $S_{ABCD} = \frac{1}{2}AC \cdot BD$ .

• Diện tích lục giác đều:  $S_{ABCDEF} = 6 \cdot S_{\triangle OAB}$ .

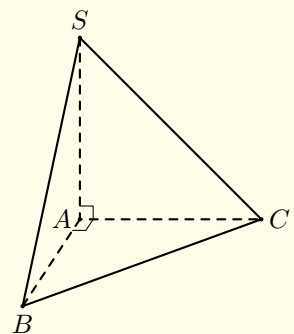


### B BÀI TẬP MẪU

#### CÂU 14 (ĐỀ minh họa BGD 2022-2023).

Cho khối chóp  $S.ABC$  có đáy là tam giác vuông cân tại  $A$ ,  $AB = 2$ ,  $SA$  vuông góc với đáy và  $SA = 3$  (Tham khảo hình vẽ). Thể tích khối chóp đã cho bằng

- (A) 12.                      (B) 2.                      (C) 6.                      (D) 4.



### C BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ PHÁT TRIỂN

**Câu 14.1.** Cho hình chóp  $S.ABC$  có đáy  $ABC$  là tam giác vuông tại  $B$ . Cạnh bên  $SA$  vuông góc với mặt phẳng đáy,  $SA = AB = 2a$ ,  $BC = 3a$ . Thể tích của khối chóp  $S.ABC$  là

- (A)  $a^3$ .                      (B)  $3a^3$ .                      (C)  $4a^3$ .                      (D)  $2a^3$ .

**Câu 14.2.** Cho khối chóp  $S.ABCD$  có đường cao  $SA$  và đáy  $ABCD$  là hình thoi. Thể tích khối chóp đã cho được tính theo công thức nào sau đây?

- (A)  $\frac{1}{3}SA \cdot AB^2$ .                      (B)  $\frac{1}{3}SA \cdot AC \cdot BD$ .                      (C)  $\frac{1}{6}SA \cdot AC \cdot BD$ .                      (D)  $\frac{1}{2}SA \cdot AB^2$ .

**Câu 14.3.** Cho hình chóp  $S.ABC$  có  $SA$  vuông góc với mặt phẳng  $(ABC)$ . Biết  $SA = 2a$  và tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$  có  $AB = 3a$ ,  $AC = 4a$ . Tính thể tích khối chóp  $S.ABC$  theo  $a$ .

- (A)  $6a^3$ .                      (B)  $8a^3$ .                      (C)  $4a^3$ .                      (D)  $12a^3$ .

**Câu 14.4.** Cho hình chóp  $S.ABC$  có đáy  $ABC$  là tam giác đều cạnh  $a$ , cạnh bên  $SA$  vuông góc với đáy,  $SA = a$ . Thể tích của khối chóp  $S.ABC$  bằng

(A)  $\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$ .     
  (B)  $\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$ .     
  (C)  $\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$ .     
  (D)  $\frac{a^3}{4}$ .

**Câu 14.5.** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy  $ABCD$  là hình vuông cạnh  $a$ . Biết  $SA \perp (ABCD)$  và  $SA = a\sqrt{3}$ . Thể tích của khối chóp  $S.ABCD$  là

(A)  $a^3\sqrt{3}$ .     
  (B)  $\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$ .     
  (C)  $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$ .     
  (D)  $\frac{a^3}{4}$ .

**Câu 14.6.** Cho khối chóp  $S.ABC$  có chiều cao bằng 3, đáy  $ABC$  có diện tích bằng 10. Thể tích của khối chóp  $S.ABC$  bằng

(A) 2.     
  (B) 15.     
  (C) 10.     
  (D) 30.

**Câu 14.7.** Cho hình chóp  $S.ABC$  có đáy  $ABC$  là tam giác vuông tại  $B$ ,  $AB = a$ ,  $BC = 2a$ ,  $SA \perp (ABC)$ ,  $SA = 3a$ . Thể tích của khối chóp  $S.ABC$  bằng

(A)  $a^3$ .     
  (B)  $\frac{1}{3}a^3$ .     
  (C)  $3a^3$ .     
  (D)  $\frac{1}{6}a^3$ .

**Câu 14.8.** Cho hình chóp  $S.ABC$  có các cạnh  $SA, SB, SC$  đôi một vuông góc với nhau. Biết  $SA = 3$ ,  $SB = 4$ ,  $SC = 5$ , thể tích khối chóp  $S.ABC$  bằng

(A) 60.     
  (B) 10.     
  (C) 20.     
  (D) 30.

**Câu 14.9.** Cho hình chóp  $S.ABC$  có đáy  $ABC$  là tam giác vuông cân tại  $A$ ,  $AC = 2a$ . Cạnh bên  $SA$  vuông góc với mặt phẳng đáy và  $SA = a$ . Thể tích khối chóp  $S.ABC$  bằng

(A)  $4a^3$ .     
  (B)  $\frac{2a^3}{3}$ .     
  (C)  $2a^3$ .     
  (D)  $\frac{4a^3}{3}$ .

**Câu 14.10.** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy là hình vuông cạnh  $a$ ,  $SA \perp (ABCD)$  và  $SA = a$ . Thể tích khối chóp  $S.ABCD$  bằng

(A)  $\frac{1}{3}a^3$ .     
  (B)  $2a^3$ .     
  (C)  $3a^3$ .     
  (D)  $a^3$ .

**Câu 14.11.** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy  $ABCD$  là hình chữ nhật,  $AB = 3a$  và  $AD = 4a$ . Cạnh bên  $SA$  vuông góc với mặt phẳng  $(ABCD)$  và  $SA = a\sqrt{2}$ . Thể tích của khối chóp  $S.ABCD$  bằng

(A)  $4\sqrt{2}a^3$ .     
  (B)  $12\sqrt{2}a^3$ .     
  (C)  $\frac{4\sqrt{2}a^3}{3}$ .     
  (D)  $\frac{2\sqrt{2}a^3}{3}$ .

**Câu 14.12.** Cho hình chóp  $S.ABC$  có  $SA$  vuông góc với đáy. Tam giác  $ABC$  vuông cân tại  $B$ , biết  $SA = AC = 2a$ . Tính thể tích khối chóp  $S.ABC$ .

(A)  $\frac{2\sqrt{2}}{3}a^3$ .     
  (B)  $\frac{4}{3}a^3$ .     
  (C)  $\frac{2}{3}a^3$ .     
  (D)  $\frac{1}{3}a^3$ .

**Câu 14.13.** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy  $ABCD$  là hình vuông cạnh  $a$ ,  $SA = 3a$  và  $SA$  vuông góc với mặt phẳng đáy. Tính thể tích khối chóp  $S.ABCD$ .

(A)  $3a^3$ .     
  (B)  $\frac{a^3}{3}$ .     
  (C)  $9a^3$ .     
  (D)  $a^3$ .

**Câu 14.14.** Cho khối chóp  $S.ABC$  có đáy  $ABC$  là tam giác vuông tại  $A$ ,  $AC = 3$ ,  $AB = 4$ ,  $SA$  vuông góc với mặt phẳng  $(ABC)$  và  $SA = 3$ . Thể tích của khối chóp đã cho bằng

(A) 12.     
  (B) 6.     
  (C) 18.     
  (D) 20.

**Câu 14.15.** Cho khối chóp  $S.ABC$  có  $SA$  vuông góc với đáy,  $SA = 4$ ,  $AB = 6$ ,  $BC = 10$  và  $CA = 8$ . Thể tích  $V$  của khối chóp  $S.ABC$

- (A)  $V = 32$ .                      (B)  $V = 192$ .                      (C)  $V = 40$ .                      (D)  $V = 24$ .

**Câu 14.16.** Cho hình chóp lục giác đều có cạnh đáy bằng 1 chiều cao bằng 4. Thể tích của khối chóp đã cho bằng

- (A)  $2\sqrt{3}$ .                      (B)  $6\sqrt{3}$ .                      (C)  $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ .                      (D)  $\frac{\sqrt{3}}{3}$ .

**Câu 14.17.** Cho khối chóp tam giác đều có cạnh đáy bằng 2 và chiều cao  $h = 12$ . Thể tích của khối chóp đã cho bằng

- (A)  $24\sqrt{3}$ .                      (B)  $12\sqrt{3}$ .                      (C)  $6\sqrt{3}$ .                      (D)  $4\sqrt{3}$ .

**Câu 14.18.** Cho hình chóp tứ giác đều  $S.ABCD$  có đáy là hình vuông cạnh bằng  $a\sqrt{3}$  và các cạnh bên bằng  $a\sqrt{2}$ . Thể tích khối chóp  $S.ABCD$  bằng

- (A)  $\frac{a^3\sqrt{2}}{2}$ .                      (B)  $\frac{a^3\sqrt{2}}{6}$ .                      (C)  $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$ .                      (D)  $\frac{a^3\sqrt{6}}{6}$ .

**Câu 14.19.** Cho khối chóp tứ giác đều có cạnh đáy bằng  $a$ , có chiều cao bằng  $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ . Thể tích của khối chóp đã cho bằng

- (A)  $\frac{a^3\sqrt{2}}{3}$ .                      (B)  $\frac{a^3\sqrt{2}}{6}$ .                      (C)  $\frac{\sqrt{2}a^3}{2}$ .                      (D)  $\frac{\sqrt{3}a^3}{4}$ .

**Câu 14.20.** Thể tích khối tứ diện đều có cạnh bằng 3 là

- (A)  $\frac{4\sqrt{2}}{9}$ .                      (B)  $2\sqrt{2}$ .                      (C)  $\frac{9\sqrt{2}}{4}$ .                      (D)  $\sqrt{2}$ .

**(D) BẢNG ĐÁP ÁN**

14.1. D	14.2. C	14.3. C	14.4. A	14.5. C	14.6. C	14.7. A	14.8. B
14.9. B	14.10. A	14.11. A	14.12. C	14.13. D	14.14. B	14.15. A	14.16. A
14.17. D	14.18. A	14.19. B	14.20. C				

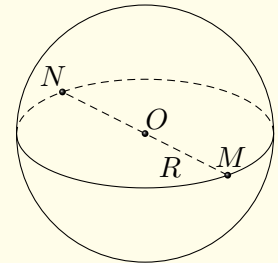
# DẠNG 15. ĐỊNH NGHĨA, TÍNH CHẤT, VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI LIÊN QUAN ĐẾN MẶT CẦU

## A KIẾN THỨC CẦN NHỚ

### 1. Định nghĩa liên quan mặt cầu

- Tập hợp các điểm  $M$  trong không gian cách điểm  $O$  cho trước một khoảng cách luôn bằng  $R$  không đổi được gọi là mặt cầu tâm  $O$ , bán kính  $R$ , kí hiệu  $S(O, R)$ , tức là

$$S(O, R) = \{M \mid OM = R\}.$$



- Đoạn thẳng nối 2 điểm phân biệt trên mặt cầu gọi là dây cung của mặt cầu.
- Dây cung lớn nhất của mặt cầu được gọi là đường kính của mặt cầu (gấp đôi bán kính).

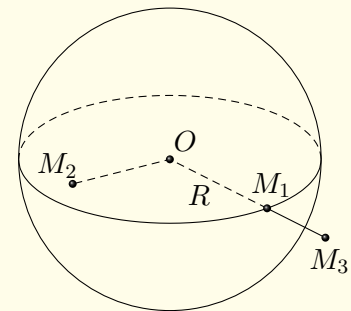
### 2. Các công thức tính toán

- Diện tích mặt cầu có bán kính  $R$  là  $S = 4\pi R^2$ .
- Thể tích khối cầu có bán kính  $R$  là  $V = \frac{4}{3}\pi R^3$ .

### 3. Vị trí tương đối giữa một điểm và mặt cầu

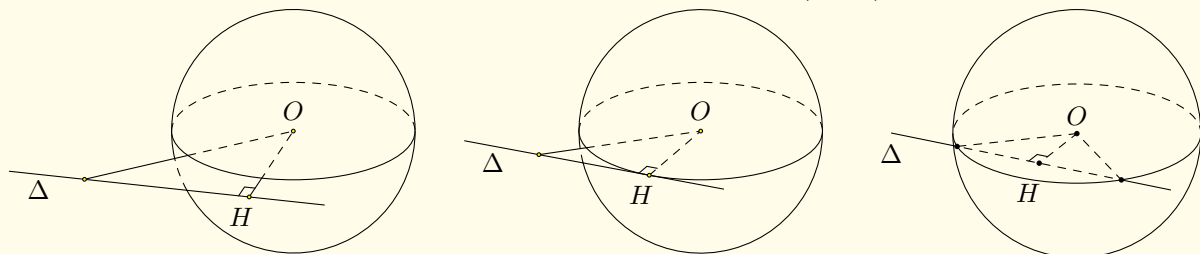
Có 3 vị trí tương đối giữa một điểm  $M$  và mặt cầu  $S(O, R)$ , đó là

- $M$  thuộc  $S(O, R)$  khi và chỉ khi  $OM = R$ .
- $M$  nằm bên trong  $S(O, R)$  khi và chỉ khi  $OM < R$ .
- $M$  nằm ngoài  $S(O, R)$  khi và chỉ khi  $OM > R$ .



### 4. Vị trí tương đối giữa đường thẳng và mặt cầu

Có 3 vị trí tương đối giữa một đường thẳng  $\Delta$  và mặt cầu  $S(O, R)$ , đó là



- $\Delta$  không có điểm chung với  $S(O, R)$  khi và chỉ khi  $d(O, \Delta) > R$ .
- $\Delta$  tiếp xúc với  $S(O, R)$  khi và chỉ khi  $\Delta$  và  $S(O, R)$  có 1 điểm chung  $\Leftrightarrow d(O, \Delta) = R$ .

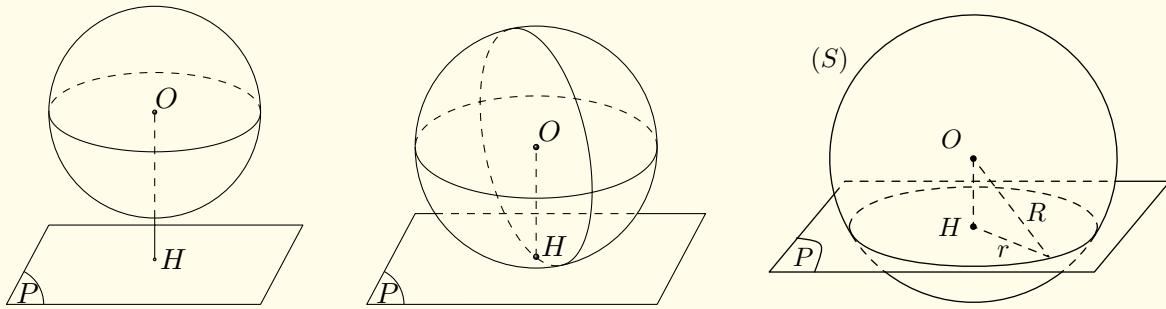


- $\Delta$  cắt  $S(O, R)$  tại hai điểm phân biệt khi và chỉ khi  $d(O, \Delta) < R$ .

Trường hợp đường thẳng  $\Delta$  tiếp xúc với mặt cầu tại  $H$  ta gọi  $\Delta$  là tiếp tuyến của mặt cầu và  $H$  là tiếp điểm của  $\Delta$  với mặt cầu.

### 5. Vị trí tương đối giữa mặt phẳng và mặt cầu

Có 3 vị trí tương đối giữa một mặt phẳng ( $P$ ) và mặt cầu  $S(O, R)$ , đó là



- ( $P$ ) không có điểm chung với  $S(O, R)$  khi và chỉ khi  $d(O, (P)) > R$ .
- ( $P$ ) tiếp xúc  $S(O, R)$  khi và chỉ khi ( $P$ ) và  $S(O, R)$  có 1 điểm chung  $\Leftrightarrow d(O, (P)) = R$ .
- ( $P$ ) cắt  $S(O, R)$  theo giao tuyến là một đường tròn khi và chỉ khi  $d(O, (P)) < R$ .

- Trường hợp mặt phẳng ( $P$ ) tiếp xúc với mặt cầu tại  $H$  ta gọi ( $P$ ) là tiếp diện của mặt cầu và  $H$  là tiếp điểm của ( $P$ ) với mặt cầu.
- Trường hợp mặt phẳng đi qua tâm của mặt cầu thì đường tròn giao tuyến được gọi là đường tròn lớn và mặt phẳng được gọi là mặt phẳng kính của mặt cầu.
- Khi mặt phẳng cắt mặt cầu theo giao tuyến là đường tròn ( $C$ ) thì ( $C$ ) có tâm  $H$  là hình chiếu vuông góc của tâm  $O$  mặt cầu lên mặt phẳng ( $P$ ), đồng thời ( $C$ ) có bán kính  $r$  tính theo công thức  $r = \sqrt{R^2 - d^2}$ , với  $d = d(O, (P))$ .

**B BÀI TẬP MẪU**

**CÂU 15 (Đề tham khảo 2023).** Cho mặt phẳng  $(P)$  tiếp xúc với mặt cầu  $S(O; R)$ . Gọi  $d$  là khoảng cách từ  $O$  đến  $(P)$ . Khẳng định nào dưới đây đúng?

- (A)  $d < R$ .                      (B)  $d > R$ .                      (C)  $d = R$ .                      (D)  $d = 0$ .

**C BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ PHÁT TRIỂN**

**Câu 15.1.** Cho mặt cầu có diện tích bằng  $36\pi$  thì khối cầu tương ứng có thể tích bằng

- (A)  $72\pi$ .                      (B)  $18\pi$ .                      (C)  $9\pi$ .                      (D)  $36\pi$ .

**Câu 15.2.** Diện tích mặt cầu có đường kính  $R$  là

- (A)  $2\pi R^2$ .                      (B)  $4\pi R^2$ .                      (C)  $\frac{4}{3}\pi R^2$ .                      (D)  $\pi R^2$ .

**Câu 15.3.** Cho khối cầu có bán kính  $R = 3$ . Thể tích khối cầu đã cho bằng

- (A)  $108\pi$ .                      (B)  $36\pi$ .                      (C)  $4\pi$ .                      (D)  $12\pi$ .

**Câu 15.4.** Diện tích  $S$  của mặt cầu có bán kính  $r$  bằng

- (A)  $S = 4\pi r^2$ .                      (B)  $S = 3\pi r^2$ .                      (C)  $S = \pi r^2$ .                      (D)  $S = 2\pi r^2$ .

**Câu 15.5.** Công thức tính thể tích khối cầu bán kính  $R$  là

- (A)  $V = 4\pi R^3$ .                      (B)  $V = \frac{4}{3}\pi R^3$ .                      (C)  $V = \frac{1}{3}\pi R^3$ .                      (D)  $V = \pi R^3$ .

**Câu 15.6.** Cho khối cầu có bán kính  $R = 2$ . Thể tích khối cầu đã cho bằng

- (A)  $32\pi$ .                      (B)  $16\pi$ .                      (C)  $\frac{16\pi}{3}$ .                      (D)  $\frac{32\pi}{3}$ .

**Câu 15.7.** Cho khối cầu  $(\mathcal{T})$  tâm  $O$  bán kính  $R$ . Gọi  $S$  và  $V$  lần lượt là diện tích mặt cầu và thể tích khối cầu tương ứng. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

- (A)  $S = \pi R^2$ .                      (B)  $V = \frac{4}{3}\pi R^3$ .                      (C)  $S = 2\pi R^2$ .                      (D)  $V = 4\pi R^3$ .

**Câu 15.8.** Khối cầu có bán kính  $R = 6$  có thể tích bằng bao nhiêu?

- (A)  $144\pi$ .                      (B)  $288\pi$ .                      (C)  $48\pi$ .                      (D)  $72\pi$ .

**Câu 15.9.** Cho mặt cầu có diện tích bằng  $\frac{8\pi a^2}{3}$ . Khi đó bán kính của mặt cầu là

- (A)  $R = \frac{a\sqrt{3}}{3}$ .                      (B)  $R = \frac{a\sqrt{2}}{3}$ .                      (C)  $R = \frac{a\sqrt{6}}{3}$ .                      (D)  $R = \frac{a\sqrt{6}}{2}$ .

**Câu 15.10.** Cho mặt cầu có bán kính  $r = \frac{\sqrt{3}}{2}$ . Diện tích của mặt cầu đã cho bằng

- (A)  $3\sqrt{3}\pi$ .                      (B)  $\frac{3}{2}\pi$ .                      (C)  $\sqrt{3}\pi$ .                      (D)  $3\pi$ .

**Câu 15.11.** Mặt cầu có bán kính bằng 6 thì diện tích bằng

- (A)  $36\pi$ .                      (B)  $288\pi$ .                      (C)  $144\pi$ .                      (D)  $72\pi$ .

**Câu 15.12.** Cho mặt cầu  $(S_1)$  có bán kính  $R_1$ , mặt cầu  $(S_2)$  có bán kính  $R_2 = 2R_1$ . Tính tỉ số diện tích của mặt cầu  $(S_2)$  và  $(S_1)$ .

- (A) 2.                      (B)  $\frac{1}{2}$ .                      (C) 3.                      (D) 4.

**Câu 15.13.** Mặt cầu có bán kính bằng 1 thì diện tích bằng

- (A)  $4\pi$ .                      (B)  $16\pi$ .                      (C)  $\frac{4\pi}{3}$ .                      (D)  $2\pi$ .

**Câu 15.14.** Cho mặt cầu có bán kính  $R = 5$ . Diện tích của mặt cầu đã cho bằng

- (A)  $\frac{100\pi}{3}$ .                      (B)  $\frac{500\pi}{3}$ .                      (C)  $100\pi$ .                      (D)  $25\pi$ .

**Câu 15.15.** Một mặt cầu có diện tích bằng  $36\pi$ , bán kính của mặt cầu đó bằng

- (A) 3.                      (B)  $3\sqrt{3}$ .                      (C)  $3\sqrt{2}$ .                      (D) 6.

**Câu 15.16.** Diện tích của mặt cầu có bán kính  $R = 3$  bằng

- (A)  $12\pi$ .                      (B)  $6\pi$ .                      (C)  $36\pi$ .                      (D)  $18\pi$ .

**Câu 15.17.** Số mặt cầu chứa một đường tròn cho trước là

- (A) 0.                      (B) Vô số.                      (C) 2.                      (D) 1.

**Câu 15.18.** Cho hai điểm  $A, B$  phân biệt. Tập hợp tâm những mặt cầu đi qua hai điểm  $A$  và  $B$  là

- (A) Mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng  $AB$ .  
 (B) Trung điểm của đường thẳng  $AB$ .  
 (C) Đường thẳng trung trực của đoạn thẳng  $AB$ .  
 (D) Mặt phẳng song song với đường thẳng  $AB$ .

**Câu 15.19.** Cho mặt cầu  $S(O; R)$  và điểm  $A$  cố định nằm ngoài mặt cầu với  $OA = d$ . Qua  $A$  kẻ đường thẳng  $\Delta$  tiếp xúc với mặt cầu  $S(O; R)$  tại  $M$ . Công thức nào sau đây được dùng để tính độ dài đoạn thẳng  $AM$ ?

- (A)  $\sqrt{R^2 - 2d^2}$ .                      (B)  $\sqrt{R^2 + d^2}$ .                      (C)  $\sqrt{d^2 - R^2}$ .                      (D)  $\sqrt{2R^2 - d^2}$ .

**Câu 15.20.** Số điểm chung giữa mặt cầu và mặt phẳng không thể là

- (A) 2.                      (B) Vô số.                      (C) 0.                      (D) 1.

**(D) BẢNG ĐÁP ÁN**

15.1. D	15.2. D	15.3. B	15.4. A	15.5. B	15.6. D	15.7. B	15.8. B
15.9. C	15.10. D	15.11. C	15.12. D	15.13. A	15.14. C	15.15. A	15.16. C
15.17. B	15.18. A	15.19. C	15.20. A				

# DẠNG 16. SỐ PHỨC VÀ CÁC PHÉP TOÁN

## A KIẾN THỨC CẦN NHỚ

### 1. Phần thực, phần ảo của số phức, số phức liên hợp

- Số phức có dạng  $z = a + bi$  ( $a, b \in \mathbb{R}, i^2 = -1$ ). Phần thực của  $z$  là  $a$ , phần ảo của  $z$  là  $b$  và  $i$  được gọi là đơn vị ảo.
- Số phức liên hợp của  $z$  là  $\bar{z} = \overline{a + bi} = a - bi$ .

$$\oplus z \cdot \bar{z} = a^2 + b^2$$

$$\oplus \overline{z_1 \pm z_2} = \bar{z}_1 \pm \bar{z}_2$$

$$\oplus \overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$$

$$\oplus \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$$

$\oplus$  Tổng và tích của  $z$  và  $\bar{z}$  luôn là một số thực.

- Lưu ý:  $i^{4n} = 1; i^{4n+1} = i; i^{4n+2} = -1; i^{4n+3} = -i$ ; với  $n \in \mathbb{N}$ .

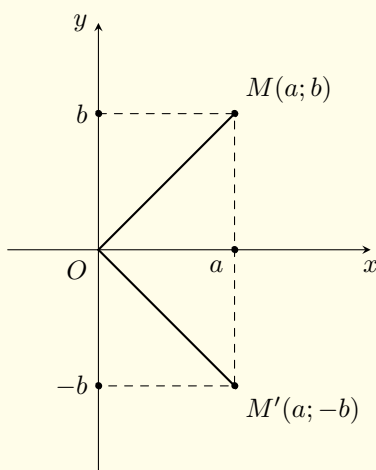
### 2. Hai số phức bằng nhau

Cho hai số phức  $z_1 = a_1 + b_1i, z_2 = a_2 + b_2i$  ( $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$ ).

Khi đó:

$$z_1 = z_2 \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = a_2 \\ b_1 = b_2 \end{cases}$$

### 3. Biểu diễn hình học của số phức, môđun của số phức



#### • Biểu diễn hình học của số phức

- Số phức  $z = a + bi$  ( $a, b \in \mathbb{R}$ ) được biểu diễn bởi điểm  $M(a; b)$  trong mặt phẳng tọa độ.

- $z$  và  $\bar{z}$  được biểu diễn bởi hai điểm đối xứng nhau qua trục  $Ox$ .
- **Mô-đun của số phức**
  - Mô-đun của số phức  $z$  là  $|z| = |\overrightarrow{OM}| = \sqrt{a^2 + b^2}$ .
  - Ta có:  $|z| = \sqrt{z \cdot \bar{z}}$ ;  $|z| = |\bar{z}|$ .

## B BÀI TẬP MẪU

### CÂU 16 (Đề minh họa BGD 2022-2023).

Phần ảo của số phức  $z = 2 - 3i$  là

- (A)  $-3$ .                      (B)  $-2$ .                      (C)  $2$ .                      (D)  $3$ .

## C BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ PHÁT TRIỂN

**Câu 16.1.** Phần thực và phần ảo của số phức  $z = (1 + 2i)i$  lần lượt là

- (A) 1 và 2.                      (B)  $-2$  và 1.                      (C) 1 và  $-2$ .                      (D) 2 và 1.

**Câu 16.2.** Cho hai số phức  $z_1 = 5 - 3i$ ,  $z_2 = -1 + 2i$ . Tổng phần thực, phần ảo của tổng hai số phức đã cho là

- (A)  $S = 3$ .                      (B)  $S = 7$ .                      (C)  $S = 4$ .                      (D)  $S = 5$ .

**Câu 16.3.** Phần ảo của số phức  $z = 4 - 5i$  là

- (A)  $-5i$ .                      (B)  $-5$ .                      (C) 5.                      (D) 4.

**Câu 16.4.** Số phức liên hợp của số phức  $1 - 2i$  là

- (A)  $-1 + 2i$ .                      (B)  $-1 - 2i$ .                      (C)  $1 + 2i$ .                      (D)  $-2 + i$ .

**Câu 16.5.** Cho số phức  $z = 2 - 3i$ . Số phức liên hợp  $\bar{z}$  là

- (A)  $\bar{z} = -2 - 3i$ .                      (B)  $\bar{z} = 3 - 2i$ .                      (C)  $\bar{z} = -2 + 3i$ .                      (D)  $\bar{z} = 2 + 3i$ .

**Câu 16.6.** Số phức  $z$  thỏa mãn  $z = 5 - 8i$  có phần ảo là

- (A) 8.                      (B)  $-8i$ .                      (C)  $-8$ .                      (D) 5.

**Câu 16.7.** Mô-đun của số phức  $z = 4 - 2i$  bằng

- (A)  $2\sqrt{5}$ .                      (B) 4.                      (C)  $2\sqrt{3}$ .                      (D)  $3\sqrt{2}$ .

**Câu 16.8.** Cho  $z = 3 + 2i$ . Tìm mô-đun của  $z$ .

- (A)  $|z| = 5$ .                      (B)  $|z| = 13$ .                      (C)  $|z| = \sqrt{13}$ .                      (D)  $|z| = \sqrt{5}$ .

**Câu 16.9.** Số phức liên hợp của số phức  $z = 6 - 8i$  là

- (A)  $-6 + 8i$ .                      (B)  $6 + 8i$ .                      (C)  $-6 - 8i$ .                      (D)  $8 - 6i$ .

**Câu 16.10.** Số phức liên hợp của số phức  $z$  có phần thực bằng 4, phần ảo bằng 5 là

- (A)  $\bar{z} = 4 + 5i$ .      (B)  $\bar{z} = 4 - 5i$ .      (C)  $\bar{z} = 5 - 4i$ .      (D)  $\bar{z} = 5 + 4i$ .

**Câu 16.11.** Cho số phức  $z = 3 - 4i$ . Mệnh đề nào dưới đây **sai**?

- (A) Số phức liên hợp của  $z$  là  $3 - 4i$ .  
 (B) Phần thực và phần ảo của  $z$  lần lượt là 3 và  $-4$ .  
 (C) Biểu diễn số phức  $z$  lên mặt phẳng tọa độ là điểm  $M(3; -4)$ .  
 (D) Mô-đun của số phức  $z$  bằng 5.

**Câu 16.12.** Số phức nào dưới đây là số thuần ảo

- (A)  $z = -2i$ .      (B)  $z = 2 + 2i$ .      (C)  $z = -1 + \sqrt{2}i$ .      (D)  $z = -2$ .

**Câu 16.13.** Phần ảo của số phức  $z = 2 + 3i$  là

- (A)  $2i$ .      (B)  $3i$ .      (C) 2.      (D) 3.

**Câu 16.14.** Số phức liên hợp của số phức  $z = 2 - 3i$  là

- (A)  $\bar{z} = 2 + 3i$ .      (B)  $\bar{z} = -2 + 3i$ .      (C)  $z = 3 + 2i$ .      (D)  $\bar{z} = 3 - 2i$ .

**Câu 16.15.** Mô-đun của số phức  $z = 7 - 5i$  bằng

- (A)  $2\sqrt{6}$ .      (B) 74.      (C) 24.      (D)  $\sqrt{74}$ .

**Câu 16.16.** Cho số phức  $z = 3 + 4i$ . Tính  $|z|$ .

- (A)  $|z| = \sqrt{5}$ .      (B)  $|z| = 13$ .      (C)  $|z| = \sqrt{13}$ .      (D)  $|z| = 5$ .

**Câu 16.17.** Cho số phức  $z = 3 - 4i$ . Mô-đun của  $z$  bằng

- (A) 12.      (B) 5.      (C) 7.      (D) 1.

**Câu 16.18.** Cho số phức  $z$  thỏa mãn  $z = 5 - 8i$  có phần ảo là

- (A)  $-8$ .      (B) 8.      (C) 5.      (D)  $-8i$ .

**Câu 16.19.** Mô-đun của số phức  $2 + 3i$  bằng

- (A)  $\sqrt{13}$ .      (B) 13.      (C)  $\sqrt{5}$ .      (D) 5.

**Câu 16.20.** Mô-đun của số phức  $z = 3 + 4i$  là

- (A) 5.      (B) 7.      (C) 3.      (D) 4.

**Câu 16.21.** Gọi  $a, b$  lần lượt là phần thực và phần ảo của số phức  $z = -3 + 2i$ . Giá trị  $a - b$  bằng

- (A) 1.      (B) 5.      (C)  $-5$ .      (D)  $-1$ .

**Câu 16.22.** Số phức có phần thực bằng 3 và phần ảo bằng 2 là

- (A)  $3 - 2i$ .      (B)  $3 + 2i$ .      (C)  $2 + 3i$ .      (D)  $2 - 3i$ .

**Câu 16.23.** Với  $x, y$  là các số thực thì số phức  $z = x - 1 + (y + 2)i$  là số ảo khi và chỉ khi

- (A)  $y = -2$ .      (B)  $x = 1, y \neq -2$ .      (C)  $y = -2, x \neq 1$ .      (D)  $x = 1$ .

**Câu 16.24.** Cho số phức  $z = -2 + i$ . Tìm phần thực và phần ảo của số phức  $\bar{z}$ .

- (A) Phần thực bằng 2 và phần ảo bằng 1.      (B) Phần thực bằng 2 và phần ảo bằng  $i$ .  
 (C) Phần thực bằng  $-2$  và phần ảo bằng  $-i$ .      (D) Phần thực bằng  $-2$  và phần ảo bằng  $-1$ .

**Câu 16.25.** Mô-đun của số phức  $z = 5 - 4i$  bằng

- (A) 1.      (B) 41.      (C)  $\sqrt{41}$ .      (D) 3.

**Câu 16.26.** Cho số phức  $z = 2 + \sqrt{3}i$ . Mô-đun của  $z$  bằng

- (A) 5.      (B)  $\sqrt{5}$ .      (C)  $\sqrt{7}$ .      (D) 7.

**Câu 16.27.** Phần thực của số phức  $(2 - i)(1 + 2i)$  là

- (A) 5.      (B) 3.      (C) 4.      (D) 0.

**Câu 16.28.** Số phức liên hợp của số phức  $z = 1 - 2i$  là

- (A)  $-1 + 2i$ .      (B)  $-1 - 2i$ .      (C)  $2 - i$ .      (D)  $1 + 2i$ .

**Câu 16.29.** Mô-đun của số phức  $z = 5 - 2i$  bằng

- (A) 29.      (B)  $\sqrt{29}$ .      (C) 3.      (D) 7.

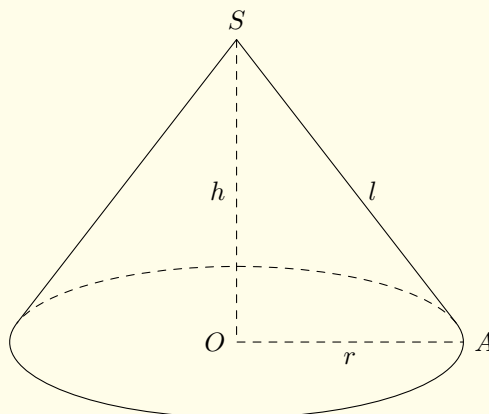
### **D BẢNG ĐÁP ÁN**

16.1. B	16.2. A	16.3. B	16.4. C	16.5. D	16.6. C	16.7. A	16.8. C
16.9. B	16.10. B	16.11. A	16.12. A	16.13. D	16.14. A	16.15. D	16.16. D
16.17. B	16.18. A	16.19. A	16.20. A	16.21. C	16.22. B	16.23. D	16.24. D
16.25. C	16.26. C	16.27. C	16.28. D	16.29. B			

## DẠNG 17. HÌNH NÓN, HÌNH TRỤ

### A KIẾN THỨC CẦN NHỚ

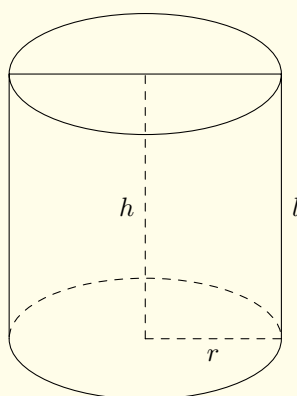
#### 1. Hình nón, khối nón



- Công thức tính diện tích xung quanh của hình nón  $S_{xq} = \pi r l$ .
- Công thức tính diện tích toàn phần của hình nón  $S_{tp} = S_{xq} + S_{đáy} = \pi r l + \pi r^2 = \pi r(l+r)$ .
- Công thức tính thể tích của khối nón  $V_{nón} = \frac{1}{3} \pi r^2 h$ .
- Áp dụng Pitago và các hệ thức lượng giác trong tam giác vuông  $SOA$ , ta có

$$l^2 = h^2 + r^2; \cos \widehat{ASO} = \frac{h}{l}; \sin \widehat{ASO} = \frac{r}{l}; \tan \widehat{ASO} = \frac{r}{h}.$$

#### 2. Hình trụ, khối trụ



- Công thức tính diện tích xung quanh của hình trụ  $S_{xq} = 2\pi r l$ .
- Công thức tính diện tích toàn phần của hình trụ  $S_{tp} = S_{xq} + 2S_{đáy} = 2\pi r l + 2\pi r^2$ .
- Công thức tính thể tích của khối nón  $V_{trụ} = \pi r^2 h$ .



## B BÀI TẬP MẪU

### CÂU 17 (ĐỀ minh họa BGD 2022-2023).

Cho hình nón có đường kính đáy  $2r$  và độ dài đường sinh  $l$ . Diện tích xung quanh của hình nón đã cho bằng

- (A)  $2\pi r l$ .                      (B)  $\frac{2}{3}\pi r l^2$ .                      (C)  $\pi r l$ .                      (D)  $\frac{1}{3}\pi r^2 l$ .

## C BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ PHÁT TRIỂN

**Câu 17.1.** Cho hình nón có bán kính đáy  $r = a$  và độ dài đường sinh  $l = 3a$ . Diện tích xung quanh của hình nón đã cho bằng

- (A)  $3\pi a^2$ .                      (B)  $\pi a^2$ .                      (C)  $4\pi a^2$ .                      (D)  $10\pi a^2$ .

**Câu 17.2.** Một khối nón có chiều cao bằng 3, độ dài đường sinh bằng 5. Thể tích của khối nón là

- (A)  $12\pi$ .                      (B)  $16\pi$ .                      (C)  $15\pi$ .                      (D)  $\frac{80\pi}{3}$ .

**Câu 17.3.** Cho khối nón có bán kính đáy bằng  $R = 1$ , đường sinh  $l = 4$ . Diện tích xung quanh của khối nón là

- (A)  $8\pi$ .                      (B)  $12\pi$ .                      (C)  $4\pi$ .                      (D)  $6\pi$ .

**Câu 17.4.** Cho khối nón có bán kính đáy  $r = \sqrt{3}$  và chiều cao  $h = 4$ . Thể tích của khối nón đã cho bằng

- (A)  $4\pi$ .                      (B)  $12\pi$ .                      (C)  $12$ .                      (D)  $4$ .

**Câu 17.5.** Cho khối nón có độ dài đường cao bằng  $2a$  và bán kính đáy bằng  $a$ . Thể tích của khối nón đã cho bằng

- (A)  $2\pi a^3$ .                      (B)  $\frac{4\pi a^3}{3}$ .                      (C)  $\frac{\pi a^3}{3}$ .                      (D)  $\frac{2\pi a^3}{3}$ .

**Câu 17.6.** Cho khối nón có bán kính đáy  $r = 2$ , chiều cao  $h = \sqrt{3}$ . Thể tích của khối nón đã cho là

- (A)  $\frac{2\pi\sqrt{3}}{3}$ .                      (B)  $4\pi\sqrt{3}$ .                      (C)  $\frac{4\pi\sqrt{3}}{3}$ .                      (D)  $\frac{4\pi}{3}$ .

**Câu 17.7.** Cho khối nón có thể tích  $V$ . Khi tăng bán kính đường tròn đáy lên 2 lần thì được khối nón mới có thể tích bằng

- (A)  $4V$ .                      (B)  $2V$ .                      (C)  $\frac{2V}{3}$ .                      (D)  $\frac{4V}{3}$ .

**Câu 17.8.** Diện tích xung quanh của hình nón có độ dài đường sinh  $l$  và bán kính đáy  $\frac{r}{2}$  bằng

- (A)  $\frac{1}{2}\pi r l$ .                      (B)  $\pi r l$ .                      (C)  $\frac{1}{6}\pi r l$ .                      (D)  $2\pi r l$ .

**Câu 17.9.** Một khối trụ có chiều cao bằng  $2a$  và diện tích đáy bằng  $2a^2$ . Tính thể tích khối lăng trụ?

A  $V = \frac{4a^2}{3}$ .     
  B  $V = \frac{4a^3}{3}$ .     
  C  $V = 4a^3$ .     
  D  $V = \frac{2a^3}{3}$ .

**Câu 17.10.** Diện tích xung quanh của hình trụ có độ dài đường sinh  $l$  và bán kính đáy  $r = \frac{1}{2}l$  là

A  $l^2$ .     
  B  $\pi l^2$ .     
  C  $2\pi l^3$ .     
  D  $2\pi l$ .

**Câu 17.11.** Một hình trụ có bán kính đáy  $r = 5$  cm, chiều cao  $h = 7$  cm. Diện tích xung quanh của hình trụ này là

A  $70\pi$  cm<sup>2</sup>.     
  B  $\frac{70}{3}\pi$  cm<sup>2</sup>.     
  C  $\frac{35}{3}\pi$  cm<sup>2</sup>.     
  D  $35\pi$  cm<sup>2</sup>.

**Câu 17.12.** Một hình trụ tròn có bán kính đáy  $r = 50$  cm và chiều cao  $h = 50$  cm. Diện tích xung quanh hình trụ bằng

A  $5000\pi$  cm<sup>2</sup>.     
  B  $5000$  cm<sup>2</sup>.     
  C  $2500\pi$  cm<sup>2</sup>.     
  D  $2500$  cm<sup>2</sup>.

**Câu 17.13.** Diện tích xung quanh của hình trụ có độ dài đường cao  $h$  và bán kính đáy  $r$  bằng

A  $4\pi rh$ .     
  B  $\pi rh$ .     
  C  $2\pi rh$ .     
  D  $\frac{1}{3}\pi rh$ .

**Câu 17.14.** Cho một khối trụ có độ dài đường sinh bằng  $10$ cm. Biết thể tích khối trụ bằng  $90\pi$  cm<sup>3</sup>. Tính diện tích xung quanh của khối trụ.

A  $36\pi$  cm<sup>2</sup>.     
  B  $81\pi$  cm<sup>2</sup>.     
  C  $60\pi$  cm<sup>2</sup>.     
  D  $78\pi$  cm<sup>2</sup>.

**Câu 17.15.** Tính diện tích xung quanh của một hình trụ có chiều cao  $20$  m, chu vi đáy bằng  $5$  m.

A  $100\pi$  m<sup>2</sup>.     
  B  $100$  m<sup>2</sup>.     
  C  $50$  m<sup>2</sup>.     
  D  $50\pi$  m<sup>2</sup>.

**Câu 17.16.** Cho khối trụ có bán kính đáy bằng  $a$  và chiều cao bằng  $3a\sqrt{3}$ . Thể tích của khối trụ đó là

A  $3\pi a^3$ .     
  B  $3\pi a^3\sqrt{3}$ .     
  C  $\pi a^3$ .     
  D  $\pi a^3\sqrt{3}$ .

**Câu 17.17.** Cho hình trụ có bán kính đáy bằng  $a$ , chu vi của thiết diện qua trục bằng  $12a$ . Thể tích của khối trụ đã cho bằng

A  $\pi a^3$ .     
  B  $4\pi a^3$ .     
  C  $6\pi a^3$ .     
  D  $5\pi a^3$ .

**Câu 17.18.** Cho khối trụ có đường sinh bằng  $2$ , thể tích  $18\pi$ . Diện tích toàn phần của khối trụ bằng

A  $20\pi$ .     
  B  $10\pi$ .     
  C  $12\pi$ .     
  D  $30\pi$ .

**Câu 17.19.** Cho khối trụ có bán kính đáy bằng  $2$ , chiều cao bằng  $3$ . Thể tích của khối trụ đã cho bằng

A  $12\pi$ .     
  B  $6\pi$ .     
  C  $4\pi$ .     
  D  $18\pi$ .

**Câu 17.20.** Công thức tính thể tích khối trụ tròn xoay có bán kính  $r$  và chiều cao  $h$  là

A  $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$ .     
  B  $V = \pi r h$ .     
  C  $V = \pi r^2 h$ .     
  D  $V = 2\pi r h$ .

## **D** BẢNG ĐÁP ÁN

17.1. A	17.2. B	17.3. C	17.4. A	17.5. D	17.6. C	17.7. A	17.8. A
17.9. C	17.10. B	17.11. A	17.12. A	17.13. C	17.14. C	17.15. B	17.16. B
17.17. B	17.18. D	17.19. A	17.20. C				

## DẠNG 18. PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG THẲNG

### A KIẾN THỨC CẦN NHỚ

#### 1. Phương trình đường thẳng

- Đường thẳng  $d$  đi qua điểm  $M(x_0; y_0; z_0)$  và có véc-tơ chỉ phương (VTCP)  $\vec{u}_d = (a_1; a_2; a_3)$  có phương trình tham số 
$$\begin{cases} x = x_0 + a_1t \\ y = y_0 + a_2t \\ z = z_0 + a_3t \end{cases}, (t \in \mathbb{R}).$$
- Điểm  $M$  thuộc đường thẳng  $d \Leftrightarrow M(x_0 + at_1; y_0 + at_2; z_0 + at_3)$ .
- Nếu  $a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \neq 0$  thì  $\frac{x - x_0}{a_1} = \frac{y - y_0}{a_2} = \frac{z - z_0}{a_3}$  được gọi là phương trình chính tắc của  $d$ .

### B BÀI TẬP MẪU

- CÂU 18.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho đường thẳng  $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+3}{-2}$ . Điểm nào dưới đây thuộc  $d$ ?
- A  $P(1; 2; 3)$ .     
  B  $Q(1; 2; -3)$ .     
  C  $N(2; 1; 2)$ .     
  D  $M(2; -1; -2)$ .

### C BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ PHÁT TRIỂN

- Câu 18.1.** Cho đường thẳng  $\Delta: \frac{x-2}{2} = \frac{y-3}{3} = \frac{z}{1}$ . Khi đó  $\Delta$  đi qua điểm  $M$  có tọa độ
- A  $(2; 3; 0)$ .     
  B  $(0; 0; 1)$ .     
  C  $(1; -1; 2)$ .     
  D  $(0; 2; -1)$ .

- Câu 18.2.** Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , cho đường thẳng  $d: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{-2} = \frac{z-1}{2}$ . Điểm nào dưới đây không thuộc  $d$ ?
- A  $N(1; 0; 1)$ .     
  B  $F(3; -4; 5)$ .     
  C  $M(0; 2; 1)$ .     
  D  $E(2; -2; 3)$ .

- Câu 18.3.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho đường thẳng  $d: \frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z+3}{-2}$ . Điểm nào dưới đây thuộc  $d$ ?
- A  $N(2; 3; -2)$ .     
  B  $M(1; 1; -3)$ .     
  C  $Q(3; 2; -2)$ .     
  D  $P(-1; 1; -3)$ .

- Câu 18.4.** Trong không gian  $Oxyz$ , điểm nào dưới đây thuộc đường thẳng  $d: \frac{x+2}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+2}{2}$ ?
- A  $P(1; 1; 2)$ .     
  B  $N(2; -1; 2)$ .     
  C  $Q(-2; 1; -2)$ .     
  D  $M(-2; -2; 1)$ .

- Câu 18.5.** Trong không gian  $Oxyz$ , đường thẳng  $d: \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z+3}{5}$  không đi qua điểm nào dưới đây?

- (A)  $N(0; 5; -8)$ .      (B)  $Q(1; 2; -3)$ .      (C)  $M(2; -1; 2)$ .      (D)  $P(0; 2; -8)$ .

**Câu 18.6.** Trong không gian với hệ trục tọa độ  $Oxyz$  cho đường thẳng  $\Delta$  có phương trình  $\Delta: \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z+3}{4}$ . Đường thẳng  $\Delta$  đi qua điểm  $M$  nào bên dưới?

- (A)  $M(5; -4; 7)$ .      (B)  $M(-5; 11; -15)$ .      (C)  $M(-5; 7; -12)$ .      (D)  $M(5; 4; -7)$ .

**Câu 18.7.** Trong không gian  $Oxyz$ , điểm nào dưới đây thuộc đường thẳng  $d: \frac{x+2}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+2}{2}$ .

- (A)  $Q(-2; 1; -2)$ .      (B)  $M(-2; -2; 1)$ .      (C)  $P(1; 1; 2)$ .      (D)  $N(2; -1; 2)$ .

**Câu 18.8.** Trong không gian  $Oxyz$ , đường thẳng  $d: \begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = -1 - 4t \\ z = 5t \end{cases}$  đi qua điểm nào sau đây?

- (A)  $M(5; 5; 5)$ .      (B)  $M(3; -4; 5)$ .      (C)  $M(2; -1; 0)$ .      (D)  $M(8; , 9; 10)$ .

**Câu 18.9.** Trong không gian  $Oxyz$ , điểm nào sau đây không nằm trên đường thẳng  $\Delta: \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{3}$ ?

- (A)  $M(1; -1; 0)$ .      (B)  $N(3; 0; 3)$ .      (C)  $P(-3; -3; -6)$ .      (D)  $Q(5; 1; 5)$ .

**Câu 18.10.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho đường thẳng  $(d): \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2t \\ z = 2 + t \end{cases}$ . Điểm nào dưới đây thuộc  $(d)$ ?

- (A)  $M(1; 2; 2)$ .      (B)  $N(0; 2; 3)$ .      (C)  $P(-1; 4; 2)$ .      (D)  $Q(-1; 2; 1)$ .

**Câu 18.11.** Trong không gian  $Oxyz$ , điểm nào dưới đây thuộc đường thẳng  $d: \frac{x-2}{-3} = \frac{y+1}{2} = \frac{z+3}{1}$ ?

- (A)  $(3; -2; 1)$ .      (B)  $(2; -1; -3)$ .      (C)  $(-2; 1; 3)$ .      (D)  $(-3; 2; 1)$ .

**Câu 18.12.** Trong không gian  $Oxyz$ , điểm nào sau đây không thuộc đường thẳng  $d: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 3 - 4t \\ z = 6 - 5t \end{cases}$ ?

- (A)  $P(-1; -3; -6)$ .      (B)  $Q(-1; 7; 11)$ .      (C)  $M(1; 3; 6)$ .      (D)  $N(3; -1; 1)$ .

**Câu 18.13.** Trong không gian  $Oxyz$ , điểm nào sau đây thuộc đường thẳng  $d: \frac{x+1}{-1} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-1}{3}$ ?

- (A)  $M(1; 2; 1)$ .      (B)  $Q(1; -2; -1)$ .      (C)  $N(-1; 3; 2)$ .      (D)  $P(-1; 2; 1)$ .

**Câu 18.14.** Trong không gian  $Oxyz$ , đường thẳng  $d: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 - 3t \\ z = 3 - t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$  không đi qua điểm

nào dưới đây?

- (A)  $Q(1; 2; 3)$ . (B)  $M(3; -1; 2)$ . (C)  $P(2; -2; 3)$ . (D)  $N(-1; 5; 4)$ .

**Câu 18.15.** Trong không gian  $Oxyz$ , điểm nào dưới đây thuộc đường thẳng  $\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-2}{3}$ ?

- (A)  $P(2; -1; 3)$ . (B)  $M(-1; 1; -2)$ . (C)  $N(1; -1; 2)$ . (D)  $Q(-2; 1; -3)$ .

**Câu 18.16.** Trong không gian  $Oxyz$ , điểm nào dưới đây thuộc đường thẳng  $d: \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 5 + t \\ z = 2 + 3t \end{cases}$  ?

- (A)  $P(1; 2; 5)$ . (B)  $N(1; 5; 2)$ . (C)  $Q(-1; 1; 3)$ . (D)  $M(1; 1; 3)$ .

**Câu 18.17.** Trong không gian với hệ trục tọa độ  $Oxyz$ , đường thẳng  $d: \frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{-4} = \frac{z-3}{-5}$  đi qua điểm

- (A)  $(-1; 2; -3)$ . (B)  $(1; -2; 3)$ . (C)  $(-3; 4; 5)$ . (D)  $(3; -4; -5)$ .

**Câu 18.18.** Trong không gian  $Oxyz$ , điểm nào dưới đây thuộc đường thẳng  $d: \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 5 + t \\ z = 2 + 3t \end{cases}$  ?

- (A)  $P(1; 2; 5)$ . (B)  $N(1; 5; 2)$ . (C)  $M(1; 1; 3)$ . (D)  $Q(-1; 1; 3)$ .

**Câu 18.19.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho đường thẳng  $d: \frac{x-3}{-1} = \frac{y-2}{3} = \frac{z+1}{-2}$ . Điểm nào sau đây không thuộc  $d$ ?

- (A)  $P(3; 2; -1)$ . (B)  $Q(-3; -2; 1)$ . (C)  $M(4; -1; 1)$ . (D)  $N(2; 5; -3)$ .

**Câu 18.20.** Trong không gian  $Oxyz$ , đường thẳng  $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z}{3}$  đi qua điểm nào dưới đây?

- (A)  $(3; 2; 3)$ . (B)  $(2; 1; 3)$ . (C)  $(3; 1; 2)$ . (D)  $(3; 1; 3)$ .

**Câu 18.21.** Đường thẳng  $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+1}{-2}$  không đi qua điểm nào sau đây?

- (A)  $M(1; 2; -1)$ . (B)  $M(1; 2; 1)$ . (C)  $M(-1; 1; 1)$ . (D)  $M(5; 4; -5)$ .

**Câu 18.22.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho đường thẳng  $d: \frac{x+2}{1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z}{-5}$ . Đường thẳng  $d$  không đi qua điểm nào sau đây?

- (A)  $P(3; 1; 5)$ . (B)  $Q(0; 7; -10)$ . (C)  $M(-2; 3; 0)$ . (D)  $N(-1; 5; -5)$ .

**Câu 18.23.** Trong không gian  $Oxyz$ , điểm nào dưới đây thuộc đường thẳng

$$d: \begin{cases} x = -2 + t \\ y = 2 - 2t \\ z = 3 + t \end{cases} ?$$

- Ⓐ  $Q(0; 1; 4)$ .      Ⓑ  $M(3; 2; -2)$ .      Ⓒ  $N(1; 1; 2)$ .      Ⓓ  $M(3; 3; -6)$ .

**Câu 18.24.** Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , cho đường thẳng  $d: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{-2} = \frac{z-1}{2}$ .

Điểm nào dưới đây không thuộc  $d$ ?

- Ⓐ  $N(1; 0; 1)$ .      Ⓑ  $F(3; -4; 5)$ .      Ⓒ  $M(0; 2; 1)$ .      Ⓓ  $E(2; -2; 3)$ .

**Câu 18.25.** Trong không gian tọa độ  $Oxyz$ , cho đường thẳng  $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z+2}{-2}$ . Điểm nào dưới đây KHÔNG thuộc đường thẳng  $d$ ?

- Ⓐ  $N(1; -1; -2)$ .      Ⓑ  $P(-1; 0; 0)$ .      Ⓒ  $Q(-3; 1; -2)$ .      Ⓓ  $M(3; -2; -4)$ .

**Câu 18.26.** Trong không gian  $Oxyz$ , điểm nào sau đây không thuộc đường thẳng  $d: \frac{x+2}{2} = \frac{y-1}{-3} = \frac{z-4}{2}$ ?

- Ⓐ  $Q(2; -5; 4)$ .      Ⓑ  $N(0; -2; 6)$ .      Ⓒ  $P(4; -8; 10)$ .      Ⓓ  $M(-2; 1; 4)$ .

### Ⓓ BẢNG ĐÁP ÁN

18.1. A	18.2. C	18.3. D	18.4. C	18.5. D	18.6. B	18.7. A	18.8. C
18.9. D	18.10. B	18.11. B	18.12. A	18.13. D	18.14. C	18.15. C	18.16. B
18.17. B	18.18. B	18.19. B	18.20. D	18.21. B	18.22. A	18.23. D	18.24. C
18.25. C	18.26. A						

## DẠNG 19. TÌM CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ BIẾT BẢNG BIẾN THIÊN HOẶC ĐỒ THỊ

### A KIẾN THỨC CẦN NHỚ

Dựa vào bảng biến thiên hoặc đồ thị hàm số nhận biết việc đổi dấu của đạo hàm  $f'(x)$  để kết luận

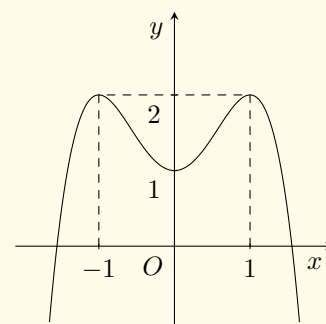
- Nếu  $f'(x)$  đổi dấu từ âm sang dương khi qua điểm  $x_0$  thì  $x_0$  là điểm cực tiểu của hàm số.
- Nếu  $f'(x)$  đổi dấu từ dương sang âm khi qua điểm  $x_0$  thì  $x_0$  là điểm cực đại của hàm số.

### B BÀI TẬP MẪU

#### CÂU 19 (ĐỀ minh họa BGD 2022-2023).

Cho hàm số  $y = ax^4 + bx^2 + c$  có đồ thị là đường cong trong hình bên. Điểm cực tiểu của đồ thị hàm số đã cho có tọa độ là

- Ⓐ  $(-1; 2)$ .      Ⓑ  $(0; 1)$ .      Ⓒ  $(1; 2)$ .      Ⓓ  $(1; 0)$ .

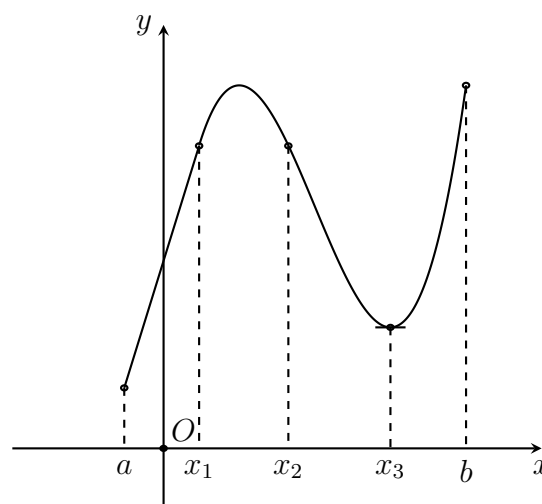


### C BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ PHÁT TRIỂN

#### Câu 19.1.

Cho hàm số  $y = f(x)$  xác định trong khoảng  $(a, b)$  và có đồ thị như hình bên dưới. Trong các khẳng định dưới đây, khẳng định nào **sai**?

- Ⓐ Hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm trong khoảng  $(a; b)$ .
- Ⓑ  $f'(x_2) > 0$ .
- Ⓒ  $f'(x_3) = 0$ .
- Ⓓ  $f'(x_1) > 0$ .



**Câu 19.2.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có bảng biến thiên như sau



$x$	$-\infty$	$-2$	$0$	$2$	$+\infty$	
$y'$		$-$	$0$	$+$	$0$	$+$
$y$	$+\infty$		$3$		$+\infty$	

$\swarrow$        $\nearrow$        $\searrow$        $\nearrow$   
 $0$        $0$

Chọn khẳng định **sai**.

- (A)  $f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ .
- (B) Hàm số  $f(x)$  đồng biến trên  $(3; +\infty)$ .
- (C) Hàm số  $f(x)$  đạt cực đại tại  $x = 3$ .
- (D) Hàm số  $f(x)$  nghịch biến trên  $(-\infty; -3)$ .

**Câu 19.3.** Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  và có bảng xét dấu của đạo hàm như hình vẽ.

$x$	$-\infty$	$-1$	$0$	$2$	$4$	$+\infty$	
$f'(x)$		$+$	$0$	$-$	$+$	$0$	$+$

Hàm số đã cho có bao nhiêu điểm cực trị?

- (A) 2.
- (B) 1.
- (C) 3.
- (D) 4.

**Câu 19.4.** Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  và có bảng biến thiên như bảng sau.

$x$	$-\infty$	$-3$	$-2$	$3$	$+\infty$	
$y'$		$-$	$+$	$0$	$-$	$+$
$y$	$+\infty$		$21$	$22$	$-3$	$+\infty$

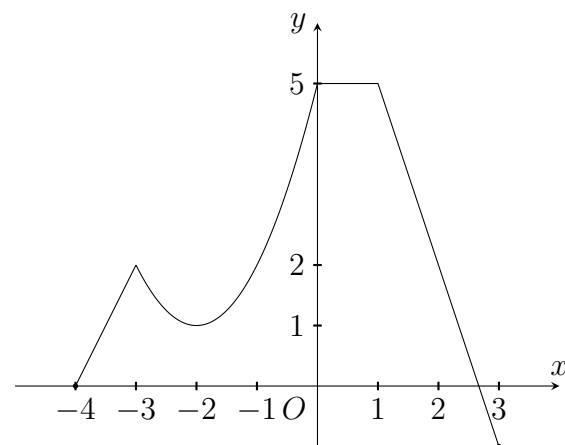
Tổng các giá trị cực tiểu của hàm số trên bằng

- (A) 19.
- (B) 18.
- (C) 0.
- (D) 22.

**Câu 19.5.**

Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên đoạn  $[-4; 3]$  và có đồ thị trên đoạn  $[-4; 3]$  như hình bên. Hãy xác định số điểm cực đại của đồ thị hàm số đó.

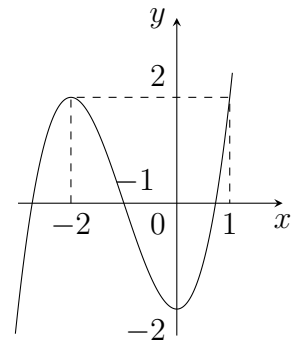
- (A) 3.
- (B) 0.
- (C) 2.
- (D) 1.



**Câu 19.6.** Cho hàm số  $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ , với  $a, b, c, d$  là các số

thực và  $a \neq 0$ , có đồ thị như hình bên. Khẳng định nào sau đây **sai**?

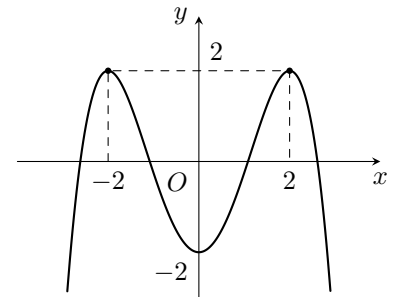
- (A)  $y' < 0, \forall x \in (-2; 0)$ .
- (B) Hàm số đạt giá trị lớn nhất tại điểm  $x = -2$ .
- (C) Đồ thị hàm số có đúng hai điểm cực trị.
- (D)  $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 0 \end{cases}$ .



**Câu 19.7.**

Cho hàm số bậc bốn  $y = f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  và có đồ thị là đường cong như hình vẽ bên. Tìm điểm cực tiểu của đồ thị hàm số  $y = f(x)$ .

- (A)  $x = 0$ .
- (B)  $y = -2$ .
- (C)  $M(0; -2)$ .
- (D)  $N(2; 2)$ .



**Câu 19.8.** Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên từng khoảng xác định và có bảng biến thiên như sau.

$x$	$-\infty$	$x_1$	$x_2$	$+\infty$
$y'$	+	-	+	
$y$	$-\infty$	$+\infty$	$0$	$+\infty$

Khẳng định nào sau đây **đúng**?

- (A) Hàm số đã cho không có cực trị.
- (B) Hàm số đã cho có một điểm cực tiểu và không có điểm cực đại.
- (C) Hàm số đã cho có một điểm cực đại và có một điểm cực tiểu.
- (D) Hàm số đã cho có một điểm cực đại và không có điểm cực tiểu.

**Câu 19.9.** Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên  $(-\infty; 4]$  và có bảng biến thiên như hình vẽ sau

$x$	$-\infty$	1	2	3	4
$y'$	+	0	-	+	0
$y$	$-\infty$	1	0	2	-1

Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

- (A) 4.
- (B) 3.
- (C) 2.
- (D) 5.

**Câu 19.10.** Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  và có bảng biến thiên như sau.

$x$	$-\infty$	$-1$	$0$	$1$	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	$0$	$-$	$+$	$0$	$-$
$f(x)$	$-\infty$	$4$	$3$	$4$	$-\infty$	

Khẳng định nào dưới đây **sai**?

- (A) Hàm số có ba điểm cực trị.
- (B) Hàm số đạt cực tiểu tại điểm  $x = 0$ .
- (C) Hàm số có giá trị cực tiểu bằng 0.
- (D) Hàm số có giá trị cực tiểu bằng 3.

**Câu 19.11.** Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  và có bảng xét dấu của  $f'(x)$  như sau

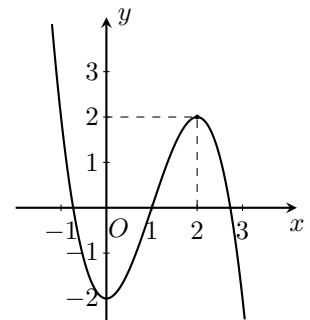
$x$	$-\infty$	$-2$	$1$	$5$	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	$-$	$0$	$-$	$0$	$+$

Số điểm cực trị của hàm số  $y = f(x)$  là

- (A) 3.
- (B) 2.
- (C) 0.
- (D) 1.

**Câu 19.12.**

Cho hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm trên  $\mathbb{R}$ . Biết rằng hàm số  $y = f'(x)$  có đồ thị như hình bên. Đặt  $g(x) = f(x) + x$ . Hỏi hàm số có bao nhiêu điểm cực đại và bao nhiêu điểm cực tiểu trên khoảng  $(-1; 3)$ ?



- (A) Hàm số có một điểm cực đại và hai điểm cực tiểu.
- (B) Hàm số có một điểm cực đại và một điểm cực tiểu.
- (C) Hàm số không có điểm cực đại và có một điểm cực tiểu.
- (D) Hàm số có hai điểm cực đại và một điểm cực tiểu.

**Câu 19.13.** Cho hàm số bậc ba  $y = f(x)$  có bảng biến thiên như hình vẽ.

$x$	$-\infty$	$0$	$2$	$+\infty$	
$y'$	$-$	$0$	$+$	$0$	$-$
$y$	$+\infty$	$-3$	$1$	$-\infty$	

Hàm số  $y = f(f(x))$  có bao nhiêu điểm cực trị?

- (A) 5.                      (B) 6.                      (C) 4.                      (D) 7.

**Câu 19.14.** Cho hàm số  $y = f(x)$  xác định và liên tục trên  $\mathbb{R}$  và có đạo hàm  $f'(x) = x^3(x + 1)^2(2 - x)$ . Hàm số đã cho có bao nhiêu điểm cực trị?

- (A) 3.                      (B) 2.                      (C) 0.                      (D) 1.

**Câu 19.15.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm trên  $\mathbb{R}$  và có bảng biến thiên như hình vẽ sau

$x$	$-\infty$	$-1$	$0$	$2$	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	$1$	$-2$	$1$	$-\infty$

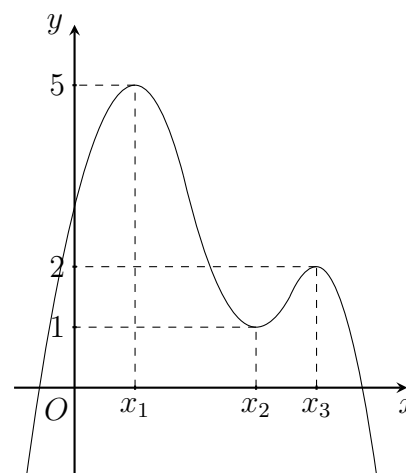
Hàm số  $y = f(2x)$  đạt cực đại tại điểm nào dưới đây?

- (A)  $x = \frac{1}{2}$ .                      (B)  $x = -2$ .                      (C)  $x = 1$ .                      (D)  $x = -1$ .

**Câu 19.16.**

Cho hàm số bậc năm  $y = f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$ , hàm số  $y = f'(x)$  có đồ thị như hình vẽ. Hàm số  $y = f(x) + \frac{2017 - 2018x}{2017}$  có số điểm cực trị là

- (A) 3.                      (B) 2.                      (C) 1.                      (D) 4.



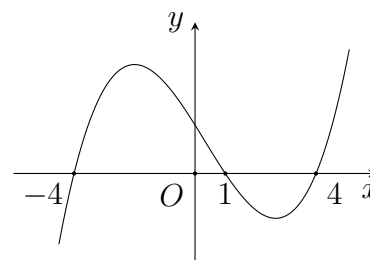
**Câu 19.17.** Cho hàm số bậc ba  $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$  có đồ thị nhận hai điểm  $A(1; 3)$  và  $B(3; -1)$  làm hai điểm cực trị. Khi đó số điểm cực trị của đồ thị hàm số  $y = |ax^2|x + bx^2 + c|x| + d|$  là

- (A) 7.                      (B) 11.                      (C) 5.                      (D) 9.

**Câu 19.18.**

Cho hàm số bậc bốn  $y = f(x)$ . Biết rằng hàm số  $y = f'(x)$  có đồ thị như hình vẽ bên. Hỏi hàm số  $y = f(5 - x^2)$  có bao nhiêu điểm cực trị?

- (A) 4.                      (B) 7.                      (C) 3.                      (D) 9.



**Câu 19.19.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có bảng biến thiên như sau

$x$	$-\infty$	$-1$	$3$	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	$0$	$-$	$0$	$+$
$f(x)$	$-\infty$	$5$	$1$	$+\infty$	

Đồ thị hàm số  $y = |f(x)|$  có bao nhiêu điểm cực trị?

(A) 2.

(B) 5.

(C) 3.

(D) 4.

**Câu 19.20.**

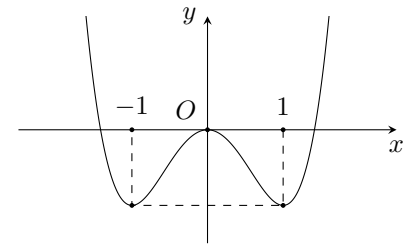
Cho hàm số bậc bốn  $y = f(x)$  có đồ thị như hình vẽ bên. Hỏi đồ thị hàm số  $y = |f(x)|$  có bao nhiêu điểm cực trị?

(A) 5.

(B) 3.

(C) 4.

(D) 2.



**(D) BẢNG ĐÁP ÁN**

19.1. B	19.2. C	19.3. D	19.4. B	19.5. D	19.6. B	19.7. C	19.8. B
19.9. B	19.10. C	19.11. B	19.12. D	19.13. B	19.14. B	19.15. C	19.16. D
19.17. B	19.18. B	19.19. C	19.20. A				

## DẠNG 20. ĐƯỜNG TIỆM CẬN

### A KIẾN THỨC CẦN NHỚ

#### 1. Đường tiệm cận ngang

Cho hàm số  $y = f(x)$  xác định trên một khoảng vô hạn (là khoảng dạng  $(a; +\infty)$ ,  $(-\infty; a)$  hoặc  $(-\infty; +\infty)$ ). Đường thẳng  $y = y_0$  là đường **tiệm cận ngang** (hay tiệm cận ngang) của đồ thị  $y = f(x)$  nếu ít nhất một trong các điều kiện sau được thỏa mãn

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = y_0, \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = y_0.$$

Như vậy, để tìm tiệm cận ngang của đồ thị hàm số ta chỉ cần tính giới hạn của hàm số đó tại vô cực.

#### 2. Đường tiệm cận đứng

Đường thẳng  $x = x_0$  được gọi là đường **tiệm cận đứng** (hay tiệm cận đứng) của đồ thị hàm số  $y = f(x)$  nếu ít nhất một trong các điều kiện sau được thỏa mãn

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = +\infty, \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = -\infty, \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = -\infty, \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = +\infty.$$

### B BÀI TẬP MẪU

#### CÂU 20 (Đề minh họa BGD 2022-2023).

Tiệm cận ngang của đồ thị hàm số  $y = \frac{2x + 1}{3x - 1}$  là đường thẳng có phương trình

A  $y = \frac{1}{3}$ .     
  B  $y = -\frac{2}{3}$ .     
  C  $y = -\frac{1}{3}$ .     
  D  $y = \frac{2}{3}$ .

### C BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ PHÁT TRIỂN

**Câu 20.1.** Đồ thị của hàm số nào trong các hàm số sau đây có tiệm cận ngang?

A  $y = \frac{2 - x}{x}$ .     
  B  $y = x^3 - x^2 + x - 3$ .  
 C  $y = x^4 - x^2 - 2$ .     
  D  $y = \frac{3x^2 - 1}{x + 1}$ .

**Câu 20.2.** Đường thẳng nào dưới đây là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số  $y = 10 + \frac{1}{x - 10}$ ?

A  $y = -10$ .     
  B  $x = -10$ .     
  C  $y = 10$ .     
  D  $x = 10$ .

**Câu 20.3.** Đồ thị hàm số  $y = \frac{x - 2}{x + 1}$  có đường tiệm cận đứng là

A  $x = 1$ .     
  B  $x = -1$ .     
  C  $y = 1$ .     
  D  $y = -1$ .

**Câu 20.4.** Tìm tiệm cận ngang của đồ thị hàm số  $y = \frac{2x + 1}{x - 1}$ .

A  $x = -1$ .     
  B  $y = -1$ .     
  C  $x = 1$ .     
  D  $y = 2$ .

**Câu 20.5.** Số đường tiệm cận của đồ thị hàm số  $y = \frac{x-1}{x+1}$  là

- (A) 2. (B) 1. (C) 3. (D) 0.

**Câu 20.6.** Đường thẳng  $x = 1$  là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số nào sau đây?

- (A)  $y = \frac{2x^2 + 3x + 2}{2-x}$ . (B)  $y = \frac{2x-2}{x+2}$ . (C)  $y = \frac{1+x^2}{1+x}$ . (D)  $y = \frac{1+x}{1-x}$ .

**Câu 20.7.** Đường thẳng  $y = -1$  là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số nào sau đây?

- (A)  $y = \frac{1+x}{1-x}$ . (B)  $y = \frac{2x^2 + 3x + 2}{2-x}$ . (C)  $y = \frac{2x-2}{x+2}$ . (D)  $y = \frac{1+x^2}{1+x}$ .

**Câu 20.8.** Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số  $y = \frac{2x+1}{2x-1}$  là

- (A)  $x = 1$ . (B)  $x = \frac{1}{2}$ . (C)  $y = \frac{1}{2}$ . (D)  $y = 1$ .

**Câu 20.9.** Đồ thị hàm số  $y = \frac{x+3}{x-2}$  có các đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang lần lượt là

- (A)  $x = 2$  và  $y = 1$ . (B)  $x = 1$  và  $y = 2$ . (C)  $x = 2$  và  $y = -3$ . (D)  $x = -2$  và  $y = 1$ .

**Câu 20.10.** Cho hàm số  $y = \frac{x-2}{x-1}$ . Đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số là

- (A)  $x = 2$ . (B)  $y = 2$ . (C)  $x = 1$ . (D)  $y = 1$ .

**Câu 20.11.** Đường tiệm ngang của đồ thị hàm số  $y = \frac{2x-6}{x-2}$  là

- (A)  $y - 3 = 0$ . (B)  $x - 2 = 0$ . (C)  $x - 3 = 0$ . (D)  $y - 2 = 0$ .

**Câu 20.12.** Đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số  $y = \frac{1-2x}{-x+2}$  là

- (A)  $x = -2, y = -2$ . (B)  $x = -2, y = -2$ . (C)  $x = -2, y = -2$ . (D)  $x = 2, y = 2$ .

**Câu 20.13.** Đồ thị hàm số  $y = \frac{x-1}{x^2+1}$  có tất cả bao nhiêu đường tiệm cận (nếu chỉ tính TĐ và TCN)?

- (A) 3. (B) 2. (C) 0. (D) 1.

**Câu 20.14.** Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số  $y = \frac{x-2}{x+3}$  là

- (A)  $x = -3$ . (B)  $y = 1$ . (C)  $x = 1$ . (D)  $y = -1$ .

**Câu 20.15.** Đồ thị của hàm số nào sau đây **không** có tiệm cận ngang?

- (A)  $y = \frac{1}{2x^2+x}$ . (B)  $y = e^x$ . (C)  $y = 2x^2+x$ . (D)  $y = \frac{2x+1}{x+2}$ .

**Câu 20.16.** Tiệm cận ngang của đồ thị hàm số  $y = \frac{2-x}{x+1}$  là

- (A)  $y = -1$ . (B)  $y = 2$ . (C)  $x = -1$ . (D)  $x = 2$ .

**Câu 20.17.** Đường thẳng nào dưới đây là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số  $y = \frac{1-4x}{2x-1}$ ?

- (A)  $y = \frac{1}{2}$ . (B)  $y = -2$ . (C)  $y = 2$ . (D)  $y = 4$ .

**Câu 20.18.** Đồ thị hàm số  $y = \frac{2x+1}{x+1}$  có tiệm cận đứng là

- (A)  $y = 2$ . (B)  $x = -1$ . (C)  $y = -1$ . (D)  $x = 1$ .

**Câu 20.19.** Đồ thị hàm số nào sau đây có đường tiệm cận đứng là  $x = 1$ ?

A  $y = \frac{x-1}{x}$ .     
  B  $y = \frac{2x}{1+x^2}$ .     
  C  $y = \frac{2x}{1-x}$ .     
  D  $y = \frac{x-1}{x+1}$ .

**Câu 20.20.** Đường thẳng nào dưới đây là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số  $y = \frac{2-x}{x+3}$ ?

A  $x = 2$ .     
  B  $x = -3$ .     
  C  $y = -1$ .     
  D  $y = -3$ .

**D BẢNG ĐÁP ÁN**

20.1. A	20.2. C	20.3. B	20.4. D	20.5. D	20.6. D	20.7. A	20.8. B
20.9. A	20.10. C	20.11. D	20.12. D	20.13. D	20.14. A	20.15. C	20.16. A
20.17. B	20.18. B	20.19. C	20.20. B				



# DẠNG 21. PHƯƠNG TRÌNH VÀ BẤT PHƯƠNG TRÌNH LOGARIT

## A KIẾN THỨC CẦN NHỚ

### 1. Phương trình logarit

- $\log_a x = b \Leftrightarrow x = a^b.$
- $\log_a f(x) = \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) > 0 \\ f(x) = g(x). \end{cases}$

### 2. Bất phương trình logarit

a) Nếu  $a > 1$  thì

- $\log_a x > b \Leftrightarrow x > a^b.$
- $\log_a x < b \Leftrightarrow 0 < x < a^b.$
- $\log_a f(x) > \log_a g(x) \Leftrightarrow f(x) > g(x) > 0.$

b) Nếu  $0 < a < 1$  thì

- $\log_a x > b \Leftrightarrow 0 < x < a^b.$
- $\log_a x < b \Leftrightarrow x > a^b.$
- $\log_a f(x) > \log_a g(x) \Leftrightarrow g(x) > f(x) > 0.$

## B BÀI TẬP MẪU

### CÂU 21 (Đề minh họa BGD 2022-2023).

Tập nghiệm của bất phương trình  $\log(x - 2) > 0$  là

- (A)  $(2; 3).$      
  (B)  $(-\infty; 3).$      
  (C)  $(3; +\infty).$      
  (D)  $(12; +\infty).$

## C BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ PHÁT TRIỂN

**Câu 21.1.** Nghiệm của phương trình  $\log_2(x - 1) = 4$  là

- (A)  $x = 15.$      
  (B)  $x = 9.$      
  (C)  $x = 17.$      
  (D)  $x = 2.$

**Câu 21.2.** Nghiệm nhỏ nhất của phương trình  $\log_5(x^2 - 3x + 5) = 1$  là

- (A)  $1.$      
  (B)  $3.$      
  (C)  $0.$      
  (D)  $-3.$

**Câu 21.3.** Tìm nghiệm của phương trình  $\log_{64}(x + 1) = \frac{1}{2}.$

- (A) 7.                      (B)  $-\frac{1}{2}$ .                      (C) -1.                      (D) 4.

**Câu 21.4.** Tìm nghiệm của phương trình  $\log_{25}(x+1) = \frac{1}{2}$ .

- (A)  $x = \frac{23}{2}$ .                      (B)  $x = -6$ .                      (C)  $x = 6$ .                      (D)  $x = 4$ .

**Câu 21.5.** Nghiệm của phương trình  $\log_5(2x-1)^3 = 6$  là

- (A) 10.                      (B) 12.                      (C) 13.                      (D) 14.

**Câu 21.6.** Tìm các nghiệm của phương trình  $\log_3(2x-3) = 2$ .

- (A)  $x = \frac{9}{2}$ .                      (B)  $x = 6$ .                      (C)  $x = 5$ .                      (D)  $x = \frac{11}{2}$ .

**Câu 21.7.** Số nghiệm của phương trình  $\log_2(x^2 - 2x) = 2$  là

- (A) 1.                      (B) 2.                      (C) 4.                      (D) 3.

**Câu 21.8.** Tập nghiệm của bất phương trình  $\log_2(x^2 + 3x) \leq 2$  là

- (A)  $[-4; -3) \cup (0; 1]$ .                      (B)  $(0; 1]$ .  
 (C)  $(-\infty; -3) \cup (0; +\infty)$ .                      (D)  $\left(0; \frac{1}{2}\right]$ .

**Câu 21.9.** Tập nghiệm  $S$  của phương trình  $\log_3(2x+3) = 1$ .

- (A)  $S = \{1\}$ .                      (B)  $S = \{3\}$ .                      (C)  $S = \{-1\}$ .                      (D)  $S = \{0\}$ .

**Câu 21.10.** Tập nghiệm của bất phương trình  $\log_5(2x-1) < \log_5(x+2)$  là

- (A)  $S = (-\infty; 3)$ .                      (B)  $S = \left(\frac{1}{2}; 3\right)$ .                      (C)  $S = (-2; 3)$ .                      (D)  $S = (3; +\infty)$ .

**Câu 21.11.** Tập nghiệm của bất phương trình  $\log x \geq 2$  là

- (A)  $(10; +\infty)$ .                      (B)  $(0; +\infty)$ .                      (C)  $[100; +\infty)$ .                      (D)  $(-\infty; 10)$ .

**Câu 21.12.** Phương trình  $\log_2(3x+1) = -4$  có tập nghiệm là

- (A)  $\emptyset$ .                      (B)  $\left\{-\frac{5}{16}\right\}$ .                      (C)  $\left\{\frac{17}{48}\right\}$ .                      (D)  $\{5\}$ .

**Câu 21.13.** Tập nghiệm của bất phương trình  $\log_2 x \geq 3$  là

- (A)  $[6; +\infty)$ .                      (B)  $[9; +\infty)$ .                      (C)  $(8; +\infty)$ .                      (D)  $[8; +\infty)$ .

**Câu 21.14.** Tập nghiệm của phương trình  $\log_2(x^2 - 1) = \log_2(2x - 1)$  là

- (A)  $\{2\}$ .                      (B)  $\emptyset$ .                      (C)  $\{0; 1; 2\}$ .                      (D)  $\{0; 2\}$ .

**Câu 21.15.** Nghiệm của phương trình  $\log_2(x+3) + \log_2(x-1) = \log_2 5$  là

- (A)  $x = 2$ .                      (B)  $x = 1$ .                      (C)  $x = 4$ .                      (D)  $x = 3$ .

**Câu 21.16.** Tập nghiệm  $S$  của bất phương trình  $\log_{\frac{1}{2}}(x^2 - 6x + 5) + \log_2(x-1) > 0$  là

- (A)  $(5; 6)$ .                      (B)  $[5; 6)$ .                      (C)  $(1; 6)$ .                      (D)  $(1; +\infty)$ .

**Câu 21.17.** Số nghiệm nguyên của bất phương trình  $\log_{\frac{1}{2}}(x-3) \geq \log_{\frac{1}{2}} 4$  là

- (A) 1.                      (B) 4.                      (C) 2.                      (D) 3.

**Câu 21.18.** Nghiệm của phương trình  $\log_3(x - 2) + \log_{\frac{1}{3}}(x - 4) = 1$  là

- Ⓐ  $x = 3$ .                      Ⓑ  $x = 6$ .                      Ⓒ  $x = 4$ .                      Ⓓ  $x = 5$ .

**Câu 21.19.** Tập nghiệm của bất phương trình  $\log_{\frac{\pi}{4}}(x + 1) > \log_{\frac{\pi}{4}}(2x - 5)$  là

- Ⓐ  $(-1; 6)$ .                      Ⓑ  $(\frac{5}{2}; 6)$ .                      Ⓒ  $(-\infty; 6)$ .                      Ⓓ  $(6; +\infty)$ .

**Câu 21.20.** Tập nghiệm của phương trình  $\log_2(x - 1) = \log_4(2x)$  là

- Ⓐ  $\{2 \pm \sqrt{3}\}$ .                      Ⓑ  $\{2 + \sqrt{3}\}$ .                      Ⓒ  $\{\frac{3}{2}\}$ .                      Ⓓ  $\{2 - \sqrt{3}\}$ .

### Ⓓ BẢNG ĐÁP ÁN

21.1. C	21.2. C	21.3. A	21.4. D	21.5. C	21.6. B	21.7. B	21.8. A
21.9. D	21.10. B	21.11. C	21.12. B	21.13. D	21.14. A	21.15. A	21.16. A
21.17. B	21.18. D	21.19. D	21.20. B				

# DẠNG 22. PHÉP ĐẾM - HOÁN VỊ - CHỈNH HỢP - TỔ HỢP

## A KIẾN THỨC CẦN NHỚ

### 1. Quy tắc cộng

Một công việc được hoàn thành bởi một trong hai hành động. Nếu hành động này có  $m$  cách thực hiện, hành động kia có  $n$  cách thực hiện không trùng với bất kì cách nào của hành động thứ nhất thì công việc đó có  $m + n$  cách thực hiện.

### 2. Quy tắc nhân

Một công việc được hoàn thành bởi hai hành động liên tiếp. Nếu có  $m$  cách thực hiện hành động thứ nhất và ứng với mỗi cách đó có  $n$  cách thực hiện cho hành động thứ hai thì có  $m \cdot n$  cách hoàn thành công việc.

### 3. Hoán vị

- Cho tập hợp  $A$  gồm  $n$  phần tử ( $n \geq 1$ ). Mỗi kết quả của sự sắp xếp thứ tự  $n$  phần tử của tập hợp  $A$  được gọi là một hoán vị của  $n$  phần tử đó.
- Số các hoán vị của  $n$  phần tử là  $P_n = n(n - 1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1 = n!$ .

### 4. Chỉnh hợp

- Cho tập hợp  $A$  gồm  $n$  phần tử ( $n \geq 1$ ). Kết quả của việc lấy  $k$  phần tử khác nhau từ  $n$  phần tử của tập hợp  $A$  và sắp xếp chúng theo một thứ tự nào đó được gọi là một chỉnh hợp chập  $k$  của  $n$  phần tử đã cho.
- Số chỉnh hợp chập  $k$  của  $n$  phần tử là  $A_n^k = \frac{n!}{(n - k)!}$  với  $1 \leq k \leq n$ .

### 5. Tổ hợp

- Cho tập hợp  $A$  gồm  $n$  phần tử ( $n \geq 1$ ). Mỗi tập con gồm  $k$  phần tử của  $A$  được gọi là một tổ hợp chập  $k$  của  $n$  phần tử đã cho.
- Số các tổ hợp chập  $k$  của  $n$  phần tử là  $C_n^k = \frac{n!}{k!(n - k)!}$  với  $0 \leq k \leq n$ .
- Một số tính chất của các số  $C_n^k$ :
  - i)  $C_n^k = C_n^{n-k}$  với  $0 \leq k \leq n$ .
  - ii)  $C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k = C_n^k$  với  $1 \leq k < n$ .

**B BÀI TẬP MẪU**

**CÂU 22 (Đề minh họa BGD 2022-2023).**

Cho tập hợp  $A$  có 15 phần tử. Số tập con gồm hai phần tử của  $A$  bằng

- (A) 225.                      (B) 30.                      (C) 210.                      (D) 105.

**C BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ PHÁT TRIỂN**

**Câu 22.1.** Với  $k, n$  là hai số nguyên dương tùy ý thỏa mãn  $k \leq n$ , mệnh đề nào dưới đây **sai**?

- (A)  $C_n^k + C_n^{k+1} = C_{n+1}^{k+1}$ .                      (B)  $C_n^k = \frac{P_n}{k!}$ .  
 (C)  $C_n^k = \frac{A_n^k}{k!}$ .                      (D)  $C_n^k = C_n^{n-k}$ .

**Câu 22.2.** Cho  $n$  là số tự nhiên lớn hơn 2. Số các chỉnh hợp chập 2 của  $n$  phần tử là

- (A)  $n(n-1)$ .                      (B)  $2n$ .                      (C)  $\frac{n(n-1)}{2!}$ .                      (D)  $2! \cdot n(n-1)$ .

**Câu 22.3.** Cho tập  $A = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ , có bao nhiêu tập con gồm 3 phần tử của tập hợp  $A$ ?

- (A)  $A_6^3$ .                      (B)  $P_6$ .                      (C)  $P_3$ .                      (D)  $C_6^3$ .

**Câu 22.4.** Cho  $n, k \in \mathbb{N}^*$  và  $n \geq k$ . Tìm công thức đúng.

- (A)  $C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$ .                      (B)  $A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!k!}$ .  
 (C)  $A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$ .                      (D)  $C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!(k+1)!}$ .

**Câu 22.5.** Số tập con có hai phần tử của tập hợp gồm 10 phần tử là

- (A) 20.                      (B) 90.                      (C) 100.                      (D) 45.

**Câu 22.6.** Cho tập hợp  $X$  gồm 10 phần tử. Số các hoán vị của 10 phần tử của tập hợp  $X$  là

- (A)  $10^{10}$ .                      (B)  $10^2$ .                      (C)  $2^{10}$ .                      (D)  $10!$ .

**Câu 22.7.** Cho tập  $A = \{1; 2; 3; \dots; 9; 10\}$ . Một tổ hợp chập 2 của 10 phần tử của  $A$  là

- (A)  $\{1; 2\}$ .                      (B) 2!.                      (C)  $A_{10}^2$ .                      (D)  $C_{10}^2$ .

**Câu 22.8.** Công thức nào dưới đây đúng?

- (A)  $A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$ .                      (B)  $A_n^k = \frac{(n-k)!}{k!}$ .                      (C)  $A_n^k = \frac{n!}{k!}$ .                      (D)  $A_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ .

**Câu 22.9.** Với  $n$  là số nguyên dương, công thức nào dưới đây đúng?

- (A)  $P_n = n!$ .                      (B)  $P_n = n - 1$ .                      (C)  $P_n = (n - 1)!$ .                      (D)  $P_n = n$ .

**Câu 22.10.** Lớp 12A có 43 học sinh và lớp 12B có 30 học sinh. Chọn ngẫu nhiên 1 học sinh từ lớp 12A và 12B. Hỏi có bao nhiêu cách chọn?

- (A) 43.                      (B) 30.                      (C) 1290.                      (D) 73.

**Câu 22.11.** Một học sinh cần mua một cây bút mực và một cây bút chì. Các cây bút mực có 8 màu khác nhau và các cây bút chì cũng có 8 màu khác nhau. Như vậy, học sinh đó có bao nhiêu cách chọn?

- (A) 16. (B) 2. (C) 3. (D) 64.

**Câu 22.12.** Một học sinh cần mua một cây bút để viết bài. Bút mực có 8 loại khác nhau, bút chì có 8 loại khác nhau. Như vậy, học sinh đó có bao nhiêu cách chọn?

- (A) 16. (B) 2. (C) 3. (D) 64.

**Câu 22.13.** Có bao nhiêu cách chọn ra 3 học sinh từ một nhóm có 7 học sinh nam và 3 học sinh nữ?

- (A)  $C_3^3$ . (B)  $C_{10}^3$ . (C)  $A_{10}^3$ . (D)  $P_3$ .

**Câu 22.14.** Từ thành phố A có 10 con đường đến thành phố B, từ thành phố B có 7 con đường đến thành phố C. Từ A đến C phải qua B, hỏi có bao nhiêu cách đi từ A đến C mà chỉ đi qua B đúng một lần?

- (A) 10. (B) 7. (C) 17. (D) 70.

**Câu 22.15.** Một người vào cửa hàng ăn, người đó chọn thực đơn gồm 1 món ăn trong 5 món, 1 loại quả trong 5 loại, 1 loại nước uống trong 3 loại. Hỏi có bao nhiêu cách lập thực đơn?

- (A) 73. (B) 75. (C) 85. (D) 95.

**Câu 22.16.** Một tổ có 4 học sinh nam và 6 học sinh nữ. Hỏi có bao nhiêu cách chọn ra 3 học sinh trong đó có 2 học sinh nam?

- (A)  $C_4^2 + C_6^1$ . (B)  $C_4^2 \cdot C_6^1$ . (C)  $A_4^2 \cdot A_6^1$ . (D)  $A_4^2 + A_6^1$ .

**Câu 22.17.** Trong một trận chung kết bóng đá phải phân định thắng thua bằng đá luân lưu 11 mét. Huấn luyện viên của mỗi đội cần trình với trọng tài một danh sách sắp thứ tự 5 cầu thủ trong 11 cầu thủ để đá luân lưu 5 quả sút luân lưu. Hỏi huấn luyện viên của mỗi đội sẽ có bao nhiêu cách lập danh sách thứ tự đá luân lưu?

- (A)  $C_{11}^5$ . (B)  $A_{11}^5$ . (C)  $5!$ . (D)  $11!$ .

**Câu 22.18.** Có 15 học sinh giỏi gồm 6 học sinh khối 12, 5 học sinh khối 11 và 4 học sinh khối 10. Hỏi có bao nhiêu cách chọn ra 6 học sinh sao cho mỗi khối có đúng 2 học sinh?

- (A)  $C_6^2 \cdot C_5^2 \cdot C_4^2$ . (B)  $A_6^2 \cdot A_5^2 \cdot A_4^2$ . (C)  $C_6^2 + C_5^2 + C_4^2$ . (D)  $A_6^2 + A_5^2 + A_4^2$ .

**Câu 22.19.** Một câu lạc bộ có 30 thành viên. Có bao nhiêu cách chọn một ban quản lý gồm 1 chủ tịch, 1 phó chủ tịch và 1 thư kí?

- (A)  $A_{30}^3$ . (B)  $C_{30}^3$ . (C)  $30!$ . (D)  $3!$ .

**Câu 22.20.** Một hộp chứa 10 quả cầu phân biệt. Số cách lấy ra cùng lúc 3 quả cầu từ hộp đó là

- (A) 720. (B)  $10^3$ . (C) 120. (D)  $3^{10}$ .

**Câu 22.21.** Giả sử ta dùng 6 màu để tô cho 4 nước khác nhau trên bản đồ và không có màu nào được dùng 2 lần. Số cách để chọn ra những màu cần dùng và tô lên bản đồ là

- (A)  $A_6^4$ . (B) 10. (C)  $C_6^4$ . (D)  $6^4$ .

**Câu 22.22.** Có bao nhiêu cách phân công 3 bạn từ một tổ có 9 bạn để làm trực nhật?

- (A)  $9^3$ . (B)  $3^9$ . (C)  $A_9^3$ . (D)  $C_9^3$ .

**Câu 22.23.** Cho 20 điểm phân biệt nằm trên một đường tròn. Hỏi có bao nhiêu tam giác được tạo thành từ các điểm này?

- (A) 8000. (B) 1140. (C) 6480. (D) 600.

**Câu 22.24.** Trong một bình đựng 4 viên bi đỏ và 3 viên bi xanh. Lấy ngẫu nhiên đồng thời 2 viên. Có bao nhiêu cách lấy?

- (A) 18. (B) 21. (C) 42. (D) 10.

**Câu 22.25.** Số cách sắp xếp 6 học sinh nữ và 4 học sinh nam thành một hàng dọc là

- (A)  $6! + 4!$ . (B)  $6! \cdot 4!$ . (C)  $C_{10}^4 \cdot C_{10}^6$ . (D)  $10!$ .

**Câu 22.26.** Cho tập hợp  $X = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7\}$ . Từ tập hợp  $X$ , hỏi có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên gồm ba chữ số đôi một khác nhau?

- (A) 35. (B) 210. (C) 840. (D) 5040.

**Câu 22.27.** Có bao nhiêu số tự nhiên có hai chữ số khác nhau mà các chữ số được lấy từ tập hợp  $X = \{1; 2; 3; 4; 5\}$ ?

- (A)  $5^2$ . (B)  $2^5$ . (C)  $A_5^2$ . (D)  $C_5^2$ .

**Câu 22.28.** Giả sử 9 vận động viên tham gia một cuộc thi bơi lội. Nếu không kể trường hợp có hai vận động viên về đích cùng một lúc thì có bao nhiêu kết quả có thể xảy ra đối với các vị trí thứ nhất, thứ nhì và thứ ba?

- (A) 84. (B) 729. (C) 504. (D)  $3^9$ .

**Câu 22.29.** Có bao nhiêu tập con gồm 3 phần tử của tập hợp  $X = \{1; 2; 3; 4; 7; 8; 9\}$ ?

- (A)  $C_7^3$ . (B)  $A_9^3$ . (C)  $A_7^3$ . (D)  $C_9^3$ .

**Câu 22.30.** Một hộp có 8 bi xanh, 5 bi đỏ và 4 bi vàng. Có bao nhiêu cách chọn ra 3 viên bi sao cho có đúng 1 bi đỏ?

- (A)  $C_5^1 \cdot C_8^1 \cdot C_4^1$ . (B)  $A_5^1 \cdot A_{12}^2$ . (C)  $C_5^1 \cdot C_{12}^2$ . (D)  $A_5^1 \cdot A_8^1 \cdot A_4^1$ .

## **D BẢNG ĐÁP ÁN**

22.1. B	22.2. A	22.3. D	22.4. C	22.5. D	22.6. D	22.7. A	22.8. A
22.9. A	22.10. D	22.11. D	22.12. A	22.13. B	22.14. D	22.15. B	22.16. B
22.17. B	22.18. A	22.19. A	22.20. C	22.21. A	22.22. D	22.23. B	22.24. B
22.25. D	22.26. B	22.27. C	22.28. C	22.29. A	22.30. C		

## DẠNG 23. NGUYÊN HÀM

### A KIẾN THỨC CẦN NHỚ

#### 1. Định nghĩa nguyên hàm

Cho hàm số  $f(x)$  xác định trên  $\mathbb{K}$ . Hàm số  $F(x)$  được gọi là nguyên hàm của hàm số  $f(x)$  trên  $\mathbb{K}$  nếu  $F'(x) = f(x), \forall x \in \mathbb{K}$ .

Nếu  $F(x)$  là một nguyên hàm của hàm số  $f(x)$  trên  $\mathbb{K}$  thì mọi nguyên hàm của  $f(x)$  trên  $\mathbb{K}$  đều có dạng  $F(x) + C$  với  $C$  là hằng số.

#### 2. Tính chất của nguyên hàm

- $\int f'(x) dx = f(x) + C$ .
- $\int kf(x) dx = k \int f(x) dx$  với  $k \neq 0$ .
- $\int [f(x) \pm g(x)] dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx$ .

#### 3. Bảng nguyên hàm của một số hàm số thường gặp

Nguyên hàm cơ bản	Nguyên hàm mở rộng
<ul style="list-style-type: none"> <li>• <math>\int 0 dx = C</math></li> <li>• <math>\int dx = x + C</math></li> <li>• <math>\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, (\alpha \neq -1)</math></li> <li>• <math>\int \frac{1}{x} dx = \ln x  + C</math></li> <li>• <math>\int \alpha^x dx = \frac{\alpha^x}{\ln \alpha} + C, (0 &lt; \alpha \neq 1)</math></li> <li>• <math>\int e^x dx = e^x + C</math></li> <li>• <math>\int \sin x dx = -\cos x + C</math></li> <li>• <math>\int \cos x dx = \sin x + C</math></li> <li>• <math>\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C</math></li> <li>• <math>\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + C</math></li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• <math>\int (ax + b)^\alpha dx = \frac{1}{a} \frac{(ax + b)^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, (\alpha \neq -1)</math></li> <li>• <math>\int \frac{1}{ax + b} dx = \frac{1}{a} \cdot \ln ax + b  + C</math></li> <li>• <math>\int \alpha^{ax+b} dx = \frac{1}{a} \cdot \frac{\alpha^{ax+b}}{\ln \alpha} + C</math></li> <li>• <math>\int e^{(ax+b)} dx = \frac{1}{a} \cdot e^{(ax+b)} + C</math></li> <li>• <math>\int \sin(ax + b) dx = -\frac{1}{a} \cos(ax + b) + C, (a \neq 0)</math></li> <li>• <math>\int \cos(ax + b) dx = \frac{1}{a} \sin(ax + b) + C, (a \neq 0)</math></li> <li>• <math>\int \frac{1}{\cos^2(ax + b)} dx = \frac{1}{a} \tan(ax + b) + C, (a \neq 0)</math></li> <li>• <math>\int \frac{1}{\sin^2(ax + b)} dx = -\frac{1}{a} \cot(ax + b) + C, (a \neq 0)</math></li> </ul>

### B BÀI TẬP MẪU

**CÂU 23.** Cho  $\int \frac{1}{x} dx = F(x) + C$ . Khẳng định nào dưới đây đúng ?

- A  $F'(x) = \frac{2}{x^2}$ .     
  B  $F'(x) = \ln x$ .     
  C  $F'(x) = \frac{1}{x}$ .     
  D  $F'(x) = -\frac{1}{x^2}$ .

### C BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ PHÁT TRIỂN

**Câu 23.1.** Hàm số  $f(x) = \cos(4x + 7)$  có một nguyên hàm là



- (A)  $\frac{1}{4} \sin(4x + 7) - 3.$ 
 (B)  $-\frac{1}{4} \sin(4x + 7) + 3.$   
 (C)  $\sin(4x + 7) - 1.$ 
 (D)  $-\sin(4x + 7) + x.$

**Câu 23.2.** Họ nguyên hàm của hàm số  $f(x) = \frac{1}{x^2} - x^2 - \frac{1}{3}$  là:

- (A)  $-\frac{x^3}{3} - \frac{1}{x} - \frac{x}{3} + C.$ 
 (B)  $-\frac{2}{x^2} - 2x + C.$   
 (C)  $-\frac{x^4 + x^2 + 3}{3x} + C.$ 
 (D)  $\frac{-x^4 + x^2 + 3}{3x} + C.$

**Câu 23.3.** Tìm  $\int \sin 5x \, dx$

- (A)  $\int \sin 5x \, dx = \frac{1}{5} \cos 5x + C.$ 
 (B)  $\int \sin 5x \, dx = -\frac{1}{5} \cos 5x + C.$   
 (C)  $\int \sin 5x \, dx = -\cos 5x + C.$ 
 (D)  $\int \sin 5x \, dx = -5 \cos 5x + C.$

**Câu 23.4.** Tìm họ nguyên hàm  $F(x)$  của hàm số  $f(x) = \cos(2x + 3)$ .

- (A)  $F(x) = \frac{1}{2} \sin(2x + 3) + C.$ 
 (B)  $F(x) = -\frac{1}{2} \sin(2x + 3) + C.$   
 (C)  $F(x) = \sin(2x + 3) + C.$ 
 (D)  $F(x) = -\sin(2x + 3) + C.$

**Câu 23.5.** Nguyên hàm của hàm số  $f(x) = 3^{2x+1}$  là:

- (A)  $\frac{1}{2 \ln 3} 3^{2x+1} + C.$ 
 (B)  $\frac{1}{\ln 3} 3^{2x+1} + C.$ 
 (C)  $\frac{1}{2} 3^{2x+1} + C.$ 
 (D)  $\frac{1}{2} 3^{2x+1} \ln 3 + C.$

**Câu 23.6.** Nguyên hàm của hàm số  $f(x) = 3x^2 + e^x + 1$  là

- (A)  $F(x) = x^3 + e^x + x + C.$ 
 (B)  $F(x) = x^3 + e^x + 1 + C.$   
 (C)  $F(x) = 2x^3 + e^x + x + C.$ 
 (D)  $F(x) = 6x + e^x + C.$

**Câu 23.7.** Công thức nguyên hàm nào sau đây không đúng?

- (A)  $\int \frac{1}{x} \, dx = \ln x + C.$ 
 (B)  $\int \frac{1}{\cos^2 x} \, dx = \tan x + C.$   
 (C)  $\int x^\alpha \, dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad (\alpha \neq -1).$ 
 (D)  $\int a^x \, dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \quad (0 < a \neq 1).$

**Câu 23.8.** Họ các nguyên hàm của hàm số  $y = e^{-3x+1}$  là

- (A)  $-3e^{-3x+1} + C.$ 
 (B)  $\frac{1}{3}e^{-3x+1} + C.$ 
 (C)  $-\frac{1}{3}e^{-3x+1} + C.$ 
 (D)  $3e^{-3x+1} + C.$

**Câu 23.9.** Họ tất cả nguyên hàm của hàm số  $f(x) = \cos x + 6x$  là

- (A)  $-\sin x + C.$ 
 (B)  $-\sin x + 3x^2 + C.$ 
 (C)  $\sin x + 3x^2 + C.$ 
 (D)  $\cos x + 6x^2 + C.$

**Câu 23.10.** Họ nguyên hàm của hàm số  $f(x) = \sin 2x + \cos x$  là

- (A)  $\cos^2 x - \sin x + C.$ 
 (B)  $\sin^2 x + \sin x + C.$   
 (C)  $\cos 2x - \sin x + C.$ 
 (D)  $-\cos 2x + \sin x + C.$

**Câu 23.11.** Họ nguyên hàm của hàm số  $f(x) = e^{-x} - 1$  là

- (A)  $-e^x - x + C.$ 
 (B)  $e^{-x} - x + C.$ 
 (C)  $e^x + x + C.$ 
 (D)  $-e^{-x} - x + C.$

**Câu 23.12.** Khẳng định nào đây đúng?

- (A)  $\int \sin x \, dx = -\sin x + C.$ 
 (B)  $\int \sin x \, dx = \frac{1}{2} \sin^2 x + C.$   
 (C)  $\int \sin x \, dx = \cos x + C.$ 
 (D)  $\int \sin x \, dx = -\cos x + C.$

**Câu 23.13.** Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số  $f(x) = 2^x + 4x$  là

- (A)  $2^x \ln 2 + 2x^2 + C$ . (B)  $\frac{2^x}{\ln 2} + 2x^2 + C$ . (C)  $2^x \ln 2 + C$ . (D)  $\frac{2^x}{\ln 2} + C$ .

**Câu 23.14.** Nguyên hàm của hàm số  $f(x) = 2x^3 - 9$  là:

- (A)  $\frac{1}{4}x^4 + C$ . (B)  $4x^3 - 9x + C$ . (C)  $\frac{1}{2}x^4 - 9x + C$ . (D)  $4x^4 - 9x + C$ .

**Câu 23.15.** Mệnh đề nào sau đây đúng?

- (A)  $\int \sin x \, dx = \cos x + C$ . (B)  $\int \cos x \, dx = \sin x + C$ .  
 (C)  $\int a^x \, dx = a^x + C$  ( $0 < a \neq 1$ ). (D)  $\int \frac{1}{x} \, dx = -\frac{1}{x^2} + C$  ( $x \neq 0$ ).

**Câu 23.16.** Khẳng định nào sau đây là sai?

- (A) Mọi hàm số  $f(x)$  liên tục trên đoạn  $[a; b]$  đều có nguyên hàm trên đoạn  $[a; b]$ .  
 (B)  $\int e^x \, dx = e^x + C$  ( $C$  là hằng số).  
 (C)  $\int \frac{1}{x} \, dx = \ln|x| + C$  ( $C$  là hằng số) với  $x \neq 0$ .  
 (D)  $\int x^\alpha \, dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$  ( $C$  là hằng số,  $\alpha$  là hằng số).

**Câu 23.17.** Họ nguyên hàm của hàm số  $f(x) = \frac{1}{x^2} - x^2 - \frac{1}{3}$  là

- (A)  $-\frac{x^4 + x^2 + 3}{3x} + C$ . (B)  $-\frac{x^3}{3} - \frac{1}{x} - \frac{x}{3} + C$ .  
 (C)  $-\frac{x^4 + x^2 + 3}{3x} + C$ . (D)  $-\frac{2}{x^2} - 2x + C$ .

**Câu 23.18.** Nếu hàm số  $y = \sin x$  là một nguyên hàm của hàm số  $y = f(x)$  thì

- (A)  $f(x) = -\sin x$ . (B)  $f(x) = -\cos x$ . (C)  $f(x) = \sin x$ . (D)  $f(x) = \cos x$ .

**Câu 23.19.** Nguyên hàm của hàm số  $f(x) = \sqrt[3]{x}$  là

- (A)  $F(x) = \frac{3x\sqrt[3]{x}}{4} + C$ . (B)  $F(x) = \frac{4x}{3\sqrt[3]{x}} + C$ .  
 (C)  $F(x) = \frac{4x}{3\sqrt[3]{x^2}} + C$ . (D)  $F(x) = \frac{3\sqrt[3]{x^2}}{4} + C$ .

**Câu 23.20.** Họ nguyên hàm của hàm số  $f(x) = \frac{1}{x-1}$  là

- (A)  $\ln|x-1| + C$ . (B)  $-\frac{1}{(x-1)^2} + C$ . (C)  $2\ln|x-1| + C$ . (D)  $\ln(x-1) + C$ .

**D BẢNG ĐÁP ÁN**

23.1. A	23.2. A	23.3. A	23.4. A	23.5. A	23.6. A	23.7. A	23.8. C
23.9. C	23.10. B	23.11. D	23.12. D	23.13. B	23.14. C	23.15. B	23.16. D
23.17. B	23.18. D	23.19. A	23.20. A				

## DẠNG 24. TÍCH PHÂN

### A KIẾN THỨC CẦN NHỚ

#### 1. Định nghĩa tích phân

Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục và xác định trên đoạn  $[a; b]$ . Giả sử  $F(x)$  là một nguyên hàm của  $f(x)$  trên đoạn  $[a; b]$ .

Hiệu số  $F(b) - F(a)$  được gọi là tích phân từ  $a$  đến  $b$  của hàm số  $f(x)$ . Kí hiệu là  $\int_a^b f(x) dx$ .

$$\text{Vậy } \int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

#### 2. Tính chất tích phân xác định

Tính chất của tích phân xác định.

$$\bullet \int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx \text{ với } a < c < b.$$

$$\bullet k \int_a^b f(x) dx = \int_a^b kf(x) dx \text{ với } (k \neq 0).$$

$$\bullet \int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx.$$

$$\bullet \int_a^b (f(x) \pm g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx.$$

$$\bullet \int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(t) dt = \int_a^b f(z) dz.$$

$$\bullet \int_a^b f'(x) dx = f(x) \Big|_a^b = f(b) - f(a).$$

### B BÀI TẬP MẪU

#### CÂU 24 (Đề minh họa BGD 2022-2023).

Nếu  $\int_0^2 f(x) dx = 4$  thì  $\int_0^2 \left[ \frac{1}{2} f(x) - 2 \right] dx$  bằng

(A) 0.

(B) 6.

(C) 8.

(D) -2.

## BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ PHÁT TRIỂN

**Câu 24.1.** Cho  $\int_1^2 f(x) dx = 3$  và  $\int_1^2 [3f(x) - g(x)] dx = 10$ , khi đó  $\int_1^2 g(x) dx$  bằng

(A) -1.                      (B) -4.                      (C) 17.                      (D) 1.

**Câu 24.2.** Trong các công thức sau đây, công thức nào đúng?

- (A)  $\int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_b^a v du.$                       (B)  $\int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du.$
- (C)  $\int_a^b u dv = uv \Big|_a^b + \int_a^b v du.$                       (D)  $\int_a^b u dv = uv - \int_b^a v du.$

**Câu 24.3.** Cho hàm số  $f(x)$  có đạo hàm trên đoạn  $[1; 3]$ ,  $f(3) = 5$  và  $\int_1^3 f'(x) dx = 6$ . Khi đó  $f(1)$  bằng

(A) 10.                      (B) 11.                      (C) 1.                      (D) -1.

**Câu 24.4.** Biết  $F(x)$  là một nguyên hàm của  $f(x)$  trên đoạn  $[a; b]$  và  $\int_a^b f(x) dx = 1$ ;  $F(b) = 2$ . Tính  $F(a)$ .

(A) 1.                      (B) 3.                      (C) -1.                      (D) 2.

**Câu 24.5.** Cho  $\int_{-3}^2 f(x) dx = -7$ . Tính  $\int_{-3}^2 3 \cdot f(x) dx$ ?

- (A) 4.                      (B) 21.                      (C) -21.                      (D) -4.

**Câu 24.6.** Nếu  $\int_1^4 f(x) dx = 9$  và  $\int_3^4 f(x) dx = -1$  thì  $\int_1^3 f(x) dx$  bằng

- (A) -8.                      (B) -10.                      (C) 8.                      (D) 10.

**Câu 24.7.** Nếu  $F'(x) = \frac{1}{2x+1}$  và  $F(1) = 1$  thì giá trị của  $F(2)$  bằng

- (A)  $1 + \frac{1}{2} \ln 5.$                       (B)  $1 + \frac{1}{2} \ln \frac{5}{3}.$                       (C)  $1 + \ln \frac{5}{3}.$                       (D)  $1 + \ln 5.$

**Câu 24.8.** Cho hàm số  $f, g$  liên tục trên  $K$  và  $a, b, c$  thuộc  $K$ . Công thức nào sau đây sai?

- (A)  $\int_a^b kf(x) dx = k \int_a^b f(x) dx.$
- (B)  $\int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx = \int_a^c f(x) dx$  với  $a < b < c.$
- (C)  $\int_a^b [f(x) + g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx.$
- (D)  $\int_a^b f(x) dx = \int_b^a f(x) dx.$

**Câu 24.9.** Cho  $F(x)$  là một nguyên hàm của hàm số  $f(x)$ . Khi đó hiệu số  $F(1) - F(2)$  bằng

- (A)  $\int_1^2 [-F(x)] dx$ .      (B)  $\int_1^2 f(x) dx$ .      (C)  $\int_1^2 [-f(x)] dx$ .      (D)  $\int_2^1 F(x) dx$ .

**Câu 24.10.** Với mọi hàm số  $f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$ , ta có

- (A)  $\int_0^3 f(x) dx = \int_3^0 f(x) dx$ .      (B)  $\int_0^3 f(x) dx = \int_{-3}^0 f(x) dx$ .  
 (C)  $\int_0^3 f(x) dx = -\int_3^0 f(x) dx$ .      (D)  $\int_0^3 f(x) dx = -\int_{-3}^0 f(x) dx$ .

**Câu 24.11.** Nếu  $\int_{-1}^3 f(x) dx = 2$  và  $\int_{-1}^3 g(x) dx = -1$  thì  $\int_{-1}^3 [f(x) - g(x)] dx$  bằng

- (A)  $-3$ .      (B)  $-1$ .      (C)  $3$ .      (D)  $4$ .

**Câu 24.12.** Nếu  $\int_{-1}^0 f(x) dx = -3$  và  $\int_0^1 f(x) dx = -1$  thì  $\int_{-1}^1 f(x) dx$  bằng

- (A)  $3$ .      (B)  $-2$ .      (C)  $2$ .      (D)  $-4$ .

**Câu 24.13.** Cho  $\int_1^2 f(x) dx = 1$  và  $\int_2^3 f(x) dx = -2$ . Giá trị của  $\int_1^3 f(x) dx$  bằng

- (A)  $3$ .      (B)  $1$ .      (C)  $-3$ .      (D)  $-1$ .

**Câu 24.14.** Cho  $f(x)$  là một hàm số liên tục trên  $\mathbb{R}$  và  $F(x)$  là một nguyên hàm của hàm số  $f(x)$  thỏa  $\int_1^2 f(x) dx = 5$ ;  $F(2) = 11$ . Khi đó  $F(1)$  bằng

- (A)  $16$ .      (B)  $4$ .      (C)  $6$ .      (D)  $7$ .

**Câu 24.15.** Nếu  $\int_{-1}^2 f(x) dx = 2$  và  $\int_2^5 f(x) dx = -3$  thì  $\int_{-1}^5 f(x) dx$  bằng

- (A)  $-6$ .      (B)  $-1$ .      (C)  $-5$ .      (D)  $5$ .

**Câu 24.16.** Nếu  $\int_1^2 f(x) dx = 5$  và  $\int_2^3 f(x) dx = -2$  thì  $\int_1^3 f(x) dx$  bằng

- (A)  $-7$ .      (B)  $3$ .      (C)  $7$ .      (D)  $-10$ .

**Câu 24.17.** Giả sử  $\int_0^9 f(x) dx = 37$  và  $\int_9^0 g(x) dx = 16$ . Khi đó,  $I = \int_0^9 [2f(x) + 3g(x)] dx$  bằng

- (A)  $I = 143$ .      (B)  $I = 58$ .      (C)  $I = 122$ .      (D)  $I = 26$ .

**Câu 24.18.** Cho  $\int_2^5 f(x) dx = 10$ . Khi đó  $\int_2^5 [2 - 4f(x)] dx$  bằng

- (A)  $36$ .      (B)  $-36$ .      (C)  $34$ .      (D)  $-34$ .

**Câu 24.19.** Nếu  $\int_1^0 f(x) dx = 3$  và  $\int_0^1 g(x) dx = -4$  thì  $\int_0^1 [f(x) - 2g(x)] dx$  bằng bao nhiêu?

- (A)  $11$ .      (B)  $5$ .      (C)  $-1$ .      (D)  $7$ .

**Câu 24.20.** Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên khoảng  $K$  và  $a, b, c \in K$ . Mệnh đề nào sau đây sai?

(A)  $\int_a^b f(x) dx + \int_c^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx.$ 
 (B)  $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(t) dt.$

(C)  $\int_a^b f(x) dx = -\int_b^a f(x) dx.$ 
 (D)  $\int_a^a f(x) dx = 0.$

**Câu 24.21.** Cho hàm số  $f(x)$  liên tục trên  $[a; b]$  và  $F(x)$  là một nguyên hàm của  $f(x)$ . Tìm khẳng định sai.

(A)  $\int_a^b f(x) dx = F(a) - F(b).$ 
 (B)  $\int_a^a f(x) dx = 0.$

(C)  $\int_a^b f(x) dx = -\int_b^a f(x) dx.$ 
 (D)  $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$

**Câu 24.22.** Cho hàm số phức  $f(x)$  và  $g(x)$  liên tục trên đoạn  $[1; 7]$  sao cho  $\int_1^7 f(x) dx = 2$  và

$\int_1^7 g(x) dx = -3$ . Giá trị của  $\int_1^7 [f(x) - g(x)] dx$  bằng

(A)  $-1.$ 
 (B)  $-5.$ 
 (C)  $5.$ 
 (D)  $6.$

**Câu 24.23.** Cho các số thực  $a, b$  ( $a < b$ ). Nếu hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm là hàm số liên tục trên  $\mathbb{R}$  thì

(A)  $\int_a^b f(x) dx = f'(a) - f'(b).$ 
 (B)  $\int_a^b f'(x) dx = f(b) - f(a).$

(C)  $\int_a^b f(x) dx = f'(b) - f'(a).$ 
 (D)  $\int_a^b f'(x) dx = f(a) - f(b).$

**Câu 24.24.** Cho hàm số  $y = f(x)$  xác định và liên tục trên  $\mathbb{R}$ , có  $f(8) = 20; f(4) = 12$ . Tính tích phân  $I = \int_4^8 f'(x) dx$ .

(A)  $I = 16.$ 
 (B)  $I = 4.$ 
 (C)  $I = 32.$ 
 (D)  $I = 8.$

**Câu 24.25.** Cho hàm số  $y = f(x)$  thỏa mãn điều kiện  $f(1) = 12, f'(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  và  $\int_1^4 f'(x) dx = 17$ . Khi đó  $f(4)$  bằng

(A)  $5.$ 
 (B)  $29.$ 
 (C)  $19.$ 
 (D)  $9.$

**Câu 24.26.** Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên khoảng  $K$  và  $a, b, c \in K$ . Mệnh đề nào sau đây sai?

(A)  $\int_a^b f(x) dx + \int_c^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx.$ 
 (B)  $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(t) dt.$

(C)  $\int_a^b f(x) dx = -\int_b^a f(x) dx.$ 
 (D)  $\int_a^a f(x) dx = 0.$

**Câu 24.27.** Cho  $\int_1^5 h(x) dx = 4$  và  $\int_1^7 h(x) dx = 10$ , khi đó  $\int_5^7 h(x) dx$  bằng

- (A) 6.                      (B) 5.                      (C) 7.                      (D) 2.

**Câu 24.28.** Cho  $\int_{-2}^2 f(x) dx = 1$ ,  $\int_{-2}^4 f(t) dt = -4$ . Tính  $I = \int_2^4 f(y) dy$ .

- (A)  $I = -3$ .                      (B)  $I = -5$ .                      (C)  $I = 5$ .                      (D)  $I = 3$ .

**Câu 24.29.** Cho hàm số  $f(x)$  có đạo hàm  $f'(x)$  liên tục trên  $[a; b]$ ,  $f(b) = 5$  và  $\int_a^b f'(x) dx = 1$ , khi đó  $f(a)$  bằng

- (A) 4.                      (B) 6.                      (C) -4.                      (D) -6.

**Câu 24.30.** Mệnh đề nào sau đây đúng?

- (A)  $\int_a^b f(x) dx + \int_b^a f(x) dx = 0$ .  
 (B)  $\int_a^b f(x) dx = F(a) - F(b)$  ( $F(x)$  là một nguyên hàm của  $f(x)$ ).  
 (C)  $\int_{-a}^a f(x) dx = 0$ .  
 (D)  $\int_a^b f(x) dx + \int_a^c f(x) dx = \int_b^c f(x) dx$ .

**Câu 24.31.** Cho  $\int_{-1}^2 f(x) dx = 2$  và  $\int_{-1}^2 g(x) dx = -1$ . Tính  $I = \int_{-1}^2 [x + 2f(x) + 3g(x)] dx$  bằng

- (A)  $I = \frac{5}{2}$ .                      (B)  $I = \frac{7}{2}$ .                      (C)  $I = \frac{17}{2}$ .                      (D)  $I = \frac{11}{2}$ .

**Câu 24.32.** Cho  $\int_{-1}^2 f(x) dx = 2$  và  $\int_{-1}^2 g(x) dx = -1$ . Tính  $I = \int_{-1}^2 [x + 2f(x) + 3g(x)] dx$  bằng

- (A)  $I = \frac{17}{2}$ .                      (B)  $I = \frac{5}{2}$ .                      (C)  $I = \frac{11}{2}$ .                      (D)  $I = \frac{7}{2}$ .

**Câu 24.33.** Tính  $I = \int_0^1 e^{3x} dx$ .

- (A)  $I = e^3 + \frac{1}{2}$ .                      (B)  $I = e^3 - 1$ .                      (C)  $I = e - 1$ .                      (D)  $\frac{e^3 - 1}{3}$ .

**Câu 24.34.** Nếu  $\int_1^2 f(x) dx = 5$  thì  $\int_2^1 \pi f(x) dx$  bằng

- (A)  $5\pi$ .                      (B)  $\frac{\pi}{5}$ .                      (C)  $-5\pi$ .                      (D)  $-\frac{\pi}{5}$ .

**Câu 24.35.** Cho  $\int_1^2 f(x) dx = -3$  và  $\int_2^3 f(x) dx = 4$ , khi đó tích phân  $\int_1^3 f(x) dx$  bằng

- (A) 7.                      (B) 1.                      (C) 12.                      (D) -12.

**Câu 24.36.** Nếu  $\int_0^1 f(x) dx = 2$  và  $\int_0^1 g(x) dx = 3$  thì  $\int_0^1 [f(x) + g(x)] dx$  bằng

- (A) 2.                      (B) 6.                      (C) 5.                      (D) 3.

**Câu 24.37.** Cho hàm số  $f(x)$  có đạo hàm  $f'(x)$  liên tục trên  $[a; b]$ ,  $f(b) = 5$  và  $\int_a^b f'(x) dx = 3\sqrt{5}$ .

Tính  $f(a)$ .

- (A)  $f(a) = \sqrt{5}(\sqrt{5} - 3)$ .                      (B)  $f(a) = 3\sqrt{5}$ .  
 (C)  $f(a) = \sqrt{5}(3 - \sqrt{5})$ .                      (D)  $f(a) = \sqrt{3}(\sqrt{5} - 3)$ .

**Câu 24.38.** Tính tích phân  $I = \int_0^2 (2x + 1) dx$ .

- (A)  $I = 2$ .                      (B)  $I = 4$ .                      (C)  $I = 5$ .                      (D)  $I = 6$ .

**Câu 24.39.** Tích phân  $\int_1^2 3^{x-1} dx$  bằng

- (A)  $\frac{2}{\ln 3}$ .                      (B)  $2 \ln 3$ .                      (C)  $\frac{3}{2}$ .                      (D) 2.

**(D) BẢNG ĐÁP ÁN**

24.1. A	24.2. B	24.3. D	24.4. A	24.5. C	24.6. D	24.7. B	24.8. D
24.9. C	24.10. D	24.11. C	24.12. D	24.13. D	24.14. C	24.15. B	24.16. B
24.17. D	24.18. D	24.19. B	24.20. A	24.21. A	24.22. C	24.23. B	24.24. D
24.25. B	24.26. A	24.27. A	24.28. B	24.29. A	24.30. A	24.31. A	24.32. B
24.34. C	24.35. B	24.36. C	24.37. A	24.38. D	24.39. A		



## DẠNG 25. NGUYÊN HÀM

### A KIẾN THỨC CẦN NHỚ

#### 1. Định nghĩa

- $F(x)$  là một nguyên hàm của  $f(x)$  trên  $K$  nếu  $F'(x) = f(x), \forall x \in K$ .  
Họ nguyên hàm của  $f(x)$  trên  $K$  là  $\int f(x) dx = F(x) + C$

#### 2. Tính chất

- $\int f'(x) dx = f(x) + C$ .
- $\int kf(x) dx = k \int f(x) dx, \forall k \neq 0$ .
- $\int [f(x) \pm g(x)] dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx$ .

#### 3. Một số công thức nguyên hàm cơ bản

- $\int 0 dx = C$ ,
- $\int 1 dx = x + C$ ,
- $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \rightarrow \int (ax+b)^n dx = \frac{1}{a} \cdot \frac{(ax+b)^{n+1}}{n+1} + C$ ,
- $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C \rightarrow \int \frac{1}{ax+b} dx = \frac{1}{a} \ln|ax+b| + C$ ,
- $\int \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x} + C \rightarrow \int \frac{1}{(ax+b)^2} dx = -\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{ax+b} + C$ ,
- $\int \sin x dx = -\cos x + C \rightarrow \int \sin(ax+b) dx = -\frac{1}{a} \cos(ax+b) + C$ ,
- $\int \cos x dx = \sin x + C \rightarrow \int \cos(ax+b) dx = \frac{1}{a} \sin(ax+b) + C$ ,
- $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C \rightarrow \int \frac{1}{\cos^2(ax+b)} dx = \frac{1}{a} \tan(ax+b) + C$ ,
- $\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + C \rightarrow \int \frac{1}{\sin^2(ax+b)} dx = -\frac{1}{a} \cot(ax+b) + C$ ,
- $\int e^x dx = e^x + C \rightarrow \int e^{ax+b} dx = \frac{1}{a} e^{ax+b} + C$ ,
- $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \rightarrow \int a^{mx+n} dx = \frac{1}{m} \cdot \frac{a^{mx+n}}{\ln a} + C$ .

**B BÀI TẬP MẪU**

**CÂU 25 (Đề minh họa BGD 2022-2023).**

Cho hàm số  $f(x) = \cos x + x$ . Khẳng định nào dưới đây đúng?

(A)  $\int f(x) dx = -\sin x + x^2 + C.$

(B)  $\int f(x) dx = \sin x + x^2 + C.$

(C)  $\int f(x) dx = -\sin x + \frac{x^2}{2} + C.$

(D)  $\int f(x) dx = \sin x + \frac{x^2}{2} + C.$

**C BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ PHÁT TRIỂN**

**Câu 25.1.** Họ nguyên hàm của hàm  $f(x) = \sin x$  là

(A)  $\int f(x) dx = \cos x + C.$

(B)  $\int f(x) dx = -\sin x + C.$

(C)  $\int f(x) dx = -\cos x + C.$

(D)  $\int f(x) dx = \sin x + C.$

**Câu 25.2.** Họ nguyên hàm của hàm  $f(x) = 4^x$  là

(A)  $\int f(x) dx = 4^x \ln 4 + C.$

(B)  $\int f(x) dx = 4^{x+1} + C.$

(C)  $\int f(x) dx = \frac{4^{x+1}}{x+1} + C.$

(D)  $\int f(x) dx = \frac{4^x}{\ln 4} + C.$

**Câu 25.3.** Họ nguyên hàm của hàm  $f(x) = \cos 2x$  là

(A)  $\int f(x) dx = 2 \sin 2x + C.$

(B)  $\int f(x) dx = \frac{1}{2} \sin 2x + C.$

(C)  $\int f(x) dx = \frac{1}{2} \cos 2x + C.$

(D)  $\int f(x) dx = -\frac{1}{2} \sin 2x + C.$

**Câu 25.4.** Họ nguyên hàm của hàm  $f(x) = 2x + 3$  là

(A)  $\int f(x) dx = 2x^2 + 3x + C.$

(B)  $\int f(x) dx = x^2 + C.$

(C)  $\int f(x) dx = x^2 + 3x + C.$

(D)  $\int f(x) dx = 2x^2 + C.$

**Câu 25.5.** Họ nguyên hàm của hàm  $f(x) = e^{2x} - 2x$  là

(A)  $\int f(x) dx = \frac{1}{2x+1} e^{2x} - x^2 + C.$

(B)  $\int f(x) dx = \frac{1}{2} e^{2x} - x^2 + C.$

(C)  $\int f(x) dx = e^{2x} - x^2 + C.$

(D)  $\int f(x) dx = 2e^{2x} - 2 + C.$

**Câu 25.6.** Họ nguyên hàm của hàm  $f(x) = \frac{1}{2x+1}$  là

(A)  $\int f(x) dx = -\frac{1}{2} \ln |2x+1| + C.$

(B)  $\int f(x) dx = -\ln |2x+1| + C.$

(C)  $\int f(x) dx = \frac{1}{2} \ln |2x+1| + C.$

(D)  $\int f(x) dx = \ln |2x+1| + C.$

**Câu 25.7.** Trong các khẳng định sau, khẳng định nào sai ?

(A)  $\int 0 dx = C.$

(B)  $\int e^x dx = e^x + C.$

(C)  $\int dx = x + C.$

(D)  $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C.$

**Câu 25.8.** Họ nguyên hàm của hàm  $f(x) = \sin(2x+1)$  là

(A)  $\int f(x) dx = -\frac{1}{2} \cos(2x+1) + C.$

(B)  $\int f(x) dx = 2 \cos(2x+1) + C.$

$\int f(x) dx = -2 \cos(2x + 1) + C.$ 
  $\int f(x) dx = \frac{1}{2} \cos(2x + 1) + C.$

**Câu 25.9.** Họ nguyên hàm của hàm  $f(x) = -4 \sin 2x + 2 \cos x - e^x$  là

$\int f(x) dx = 4 \cos 2x - 2 \sin x - e^x + C.$ 
  $\int f(x) dx = 2 \cos 2x + 2 \sin x - e^x + C.$   
  $\int f(x) dx = -8 \cos 2x + 2 \sin x - e^x + C.$ 
  $\int f(x) dx = 8 \cos 2x + 2 \sin x - e^x + C.$

**Câu 25.10.** Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **đúng**?

$\int \frac{1}{x} dx = \ln x + C.$ 
  $\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = \cot x + C.$   
  $\int \cos x dx = -\sin x + C.$ 
  $\int (2^x + e^x) dx = \frac{2^x}{\ln 2} + e^x + C.$

**Câu 25.11.** Họ nguyên hàm của hàm  $f(x) = x^3 - 3x^2 + 5$  là

$\int f(x) dx = \frac{x^4}{4} - x^3 + 5x + C.$ 
  $\int f(x) dx = x^4 - x^3 + 5x + C.$   
  $\int f(x) dx = 3x^2 - 6x + C.$ 
  $\int f(x) dx = x^4 - \frac{1}{3}x^3 + 5x + C.$

**Câu 25.12.** Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai**?

$\int x^e dx = \frac{x^{e+1}}{e+1} + C.$ 
  $\int x^2 dx = \frac{1}{3}x^3 + C.$   
  $\int e^x dx = \frac{e^{x+1}}{x+1} + C.$ 
  $\int x^7 dx = \frac{1}{8}x^8 + C.$

**Câu 25.13.**  $F(x) = \sin 2x$  là nguyên hàm của hàm số nào dưới đây?

$f(x) = \cos 2x.$ 
  $f(x) = 2 \cos 2x.$ 
  $f(x) = -2 \cos 2x.$ 
  $f(x) = -\frac{1}{2} \cos 2x.$

**Câu 25.14.** Họ nguyên hàm của hàm  $f(x) = 2x + \frac{1}{x}$  là

$\int f(x) dx = 4x^2 - \frac{1}{x^2} + C.$ 
  $\int f(x) dx = x^2 - \frac{1}{x^2} + C.$   
  $\int f(x) dx = 4x^2 + \ln|x| + C.$ 
  $\int f(x) dx = x^2 + \ln|x| + C.$

**Câu 25.15.** Họ nguyên hàm của hàm  $f(x) = x^3 - \frac{2}{x} + \sqrt{x}$  là

$\int f(x) dx = \frac{1}{4}x^4 - 2 \ln|x| - \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + C.$ 
  $\int f(x) dx = \frac{1}{4}x^4 + 2 \ln|x| + \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + C.$   
  $\int f(x) dx = \frac{1}{4}x^4 - 2 \ln|x| + \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + C.$ 
  $\int f(x) dx = \frac{1}{4}x^4 + 2 \ln|x| - \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + C.$

**Câu 25.16.** Họ nguyên hàm của hàm  $f(x) = \sin 3x + \cos 4x$  là

$\int f(x) dx = -\frac{1}{3} \cos x + \frac{1}{4} \sin x + C.$ 
  $\int f(x) dx = -\frac{1}{3} \cos 3x + \frac{1}{4} \sin 4x + C.$   
  $\int f(x) dx = 3 \cos 3x - 4 \sin 4x + C.$ 
  $\int f(x) dx = \frac{1}{3} \cos 3x - \frac{1}{4} \sin 4x + C.$

**Câu 25.17.** Họ nguyên hàm của hàm  $f(x) = \cos\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$  là

$\int f(x) dx = \frac{1}{6} \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) + C.$ 
  $\int f(x) dx = \frac{1}{2} \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) + C.$   
  $\int f(x) dx = \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) + C.$ 
  $\int f(x) dx = -\frac{1}{2} \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) + C.$

**Câu 25.18.** Họ nguyên hàm của hàm  $f(x) = 2x^2 + x + 1$  là

$\int f(x) dx = \frac{2x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x + C.$ 
  $\int f(x) dx = 4x + 1 + C.$   
  $\int f(x) dx = \frac{2x^3}{3} + x^2 + x + C.$ 
  $\int f(x) dx = \frac{2x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x.$

**Câu 25.19.** Họ nguyên hàm của hàm  $f(x) = 7^x$  là

Ⓐ  $\int f(x) dx = \frac{7^x}{\ln 7} + C.$

Ⓑ  $\int f(x) dx = \frac{7^{x+1}}{x+1} + C.$

Ⓒ  $\int f(x) dx = 7^x \ln 7 + C.$

Ⓓ  $\int f(x) dx = 7^{x+1} + C.$

**Câu 25.20.** Họ nguyên hàm của hàm  $f(x) = \frac{1}{1+x}$  là

Ⓐ  $\int f(x) dx = -\frac{1}{(1+x)^2} + C.$

Ⓑ  $\int f(x) dx = \ln(1+x) + C.$

Ⓒ  $\int f(x) dx = \log|1+x| + C.$

Ⓓ  $\int f(x) dx = \ln|1+x| + C.$

**Ⓓ BẢNG ĐÁP ÁN**

25.1. C	25.2. D	25.3. B	25.4. C	25.5. B	25.6. C	25.7. D	25.8. A
25.9. B	25.10. D	25.11. A	25.12. C	25.13. B	25.14. D	25.15. C	25.16. B
25.17. B	25.18. A	25.19. A	25.20. D				

## DẠNG 26. XÉT TÍNH ĐƠN ĐIỆU DỰA VÀO BẢNG BIẾN THIÊN CỦA HÀM SỐ

### A KIẾN THỨC CẦN NHỚ

#### Định lý.

Cho hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm trên  $K$ .

- a) Nếu  $f'(x) > 0$  với mọi  $x$  thuộc  $K$  thì hàm số  $f(x)$  đồng biến trên  $K$ .
- b) Nếu  $f'(x) < 0$  với mọi  $x$  thuộc  $K$  thì hàm số  $f(x)$  nghịch biến trên  $K$ .

#### Chú ý:

- $f(x)$  **đồng biến** trên  $K$ : đồ thị hàm số là đường đi lên từ trái sang phải.
- $f(x)$  **nghịch biến** trên  $K$ : đồ thị hàm số là đường đi xuống từ trái sang phải.

### B BÀI TẬP MẪU

#### CÂU 26 (Đề tham khảo BGD 2022-2023).

Cho hàm số  $y = f(x)$  có bảng biến thiên như sau

$x$	$-\infty$	1	3	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	+
$f(x)$	$-\infty$	↗ 2	↘ 0	↗ $+\infty$

Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

- (A)  $(0; 2)$ .     
  (B)  $(3; +\infty)$ .     
  (C)  $(-\infty; 1)$ .     
  (D)  $(1; 3)$ .

### C BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ PHÁT TRIỂN

**Câu 26.1.** Cho hàm số  $f(x)$  có bảng biến thiên như sau

$x$	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+	-	+
$f(x)$	$+\infty$	↘ 1	↗ 3	↘ 1	↗ $+\infty$

Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

- (A)  $(0; 2)$ .      (B)  $(0; +\infty)$ .      (C)  $(-2; 0)$ .      (D)  $(2; +\infty)$ .

**Câu 26.2.** Cho hàm số  $f(x)$  có bảng biến thiên

$x$	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	0	-	
$f(x)$	$+\infty$	↘		-2	↗		2
							$-\infty$

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng

- (A)  $(-\infty; 1)$ .      (B)  $(3; +\infty)$ .      (C)  $(1; 3)$ .      (D)  $(-2; -2)$ .

**Câu 26.3.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có bảng biến thiên như sau

$x$	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	0	-	0	+	
$f(x)$	$+\infty$	↘		4	↗		-3	↘	
							-4	↗	
									$+\infty$

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

- (A)  $(-\infty; -1)$ .      (B)  $(0; +\infty)$ .      (C)  $(0; 1)$ .      (D)  $(-1; 0)$ .

**Câu 26.4.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có bảng xét dấu đạo hàm như hình bên dưới. Mệnh đề nào sau đây đúng?

$x$	$-\infty$		-1		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-		-	0	+	

- (A) Hàm số đồng biến trên khoảng  $(-1; 0)$ .      (B) Hàm số nghịch biến trên khoảng  $(1; 3)$ .  
 (C) Hàm số nghịch biến trên khoảng  $(-1; 2)$ .      (D) Hàm số đồng biến trên khoảng  $(-2; -1)$ .

**Câu 26.5.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có bảng biến thiên như sau.

$x$	$-\infty$		-3		2		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	0	-	
$f(x)$	$+\infty$	↘		2	↗		3
							$-\infty$

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

- (A)  $(2; 3)$ .      (B)  $(-3; 2)$ .      (C)  $(2; +\infty)$ .      (D)  $(-\infty; -3)$ .

**Câu 26.6.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có bảng biến thiên như sau

$x$	$-\infty$	$-2$	$1$	$2$	$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$0$	$+$	$-$
$f(x)$	$+\infty$		$2$	$3$	$-\infty$

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

- (A)  $(-2; 1)$ .      (B)  $(-2; 2)$ .      (C)  $(-\infty; -2)$ .      (D)  $(1; +\infty)$ .

**Câu 26.7.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có bảng biến thiên như sau

$x$	$-\infty$	$-2$	$0$	$2$	$+\infty$			
$f'(x)$		$+$	$0$	$-$	$0$	$+$	$0$	$-$
$f(x)$	$-\infty$		$3$	$-1$	$3$		$-\infty$	

Hàm số  $y = f(x)$  nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

- (A)  $(-2; 0)$ .      (B)  $(-\infty; -2)$ .      (C)  $(0; 2)$ .      (D)  $(0; +\infty)$ .

**Câu 26.8.** Cho hàm số  $f(x)$  có bảng biến thiên sau:

$x$	$-\infty$	$0$	$2$	$+\infty$		
$f'(x)$		$-$	$0$	$+$	$0$	$-$
$f(x)$	$-\infty$		$5$	$3$		$+\infty$

Hàm số  $f(x)$  đồng biến trên khoảng nào sau đây?

- (A)  $(0; +\infty)$ .      (B)  $(0; 2)$ .      (C)  $(-\infty; 5)$ .      (D)  $(2; +\infty)$ .

**Câu 26.9.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có bảng biến thiên như sau

$x$	$-\infty$	$2$	$3$	$+\infty$		
$f'(x)$		$-$	$0$	$+$	$0$	$-$
$f(x)$	$+\infty$		$2$	$4$		$-\infty$

Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào sau đây?

- (A)  $(2; +\infty)$ .      (B)  $(-\infty; -2)$ .      (C)  $(2; 3)$ .      (D)  $(-2; 3)$ .

**Câu 26.10.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có bảng biến thiên như hình vẽ bên dưới. Hàm số  $y = f(x)$  đồng biến trên khoảng

$x$	$-\infty$	$0$	$1$	$+\infty$		
$f'(x)$		$+$	$0$	$-$	$0$	$+$
$f(x)$	$-\infty$	$0$	$-1$	$+\infty$		

- (A)  $(0; +\infty)$ .
  (B)  $(0; 1)$ .
  (C)  $(-3; -2)$ .
  (D)  $(-1; +\infty)$ .

**Câu 26.11.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có bảng biến thiên như sau

$x$	$-\infty$	$-3$	$-2$	$-1$	$+\infty$	
$y'$		$+$	$0$	$-$	$0$	$+$
$y$	$-\infty$	$0$	$-\infty$	$+\infty$	$0$	$+\infty$

Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

- (A)  $(-\infty; -3)$ .
  (B)  $(-3; -2)$ .
  (C)  $(-3; -1)$ .
  (D)  $(-1; +\infty)$ .

**Câu 26.12.** Cho hàm số  $f(x)$  có bảng biến thiên như sau

$x$	$-\infty$	$-1$	$0$	$1$	$+\infty$	
$f'(x)$		$-$	$0$	$+$	$0$	$+$
$f(x)$	$+\infty$	$2$	$3$	$2$	$+\infty$	

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

- (A)  $(-\infty; 1)$ .
  (B)  $(0; 1)$ .
  (C)  $(-2; 3)$ .
  (D)  $(1; +\infty)$ .

**Câu 26.13.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có bảng biến thiên như sau

$x$	$-\infty$	$-1$	$1$	$+\infty$		
$y'$		$-$	$0$	$+$	$0$	$-$
$y$	$+\infty$	$-2$	$2$	$-\infty$		

Mệnh đề nào dưới đây sai?

- (A) Hàm số  $y = f(x)$  đồng biến trên khoảng  $(-1; 1)$ .



- (B) Hàm số  $y = f(x)$  nghịch biến trên khoảng  $(1; +\infty)$ .
- (C) Hàm số  $y = f(x)$  nghịch biến trên khoảng  $(-\infty; -1)$ .
- (D) Hàm số  $y = f(x)$  đồng biến trên khoảng  $(-2; 2)$ .

**Câu 26.14.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có bảng biến thiên như hình vẽ

$x$	$-\infty$	$2$	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	$+$	$+$
$f(x)$	$1$	$+\infty$	$3$

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

- (A)  $(2; +\infty)$ .
- (B)  $(1; +\infty)$ .
- (C)  $(-\infty; 3)$ .
- (D)  $(-\infty; +\infty)$ .

**Câu 26.15.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có bảng biến thiên như hình bên dưới

$x$	$-\infty$	$-2$	$0$	$2$	$+\infty$
$y'$	$-$	$0$	$+$	$+$	$-$
$y$	$+\infty$	$3$	$+\infty$	$1$	$-\infty$

Hàm số  $y = f(x)$  đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

- (A)  $(-\infty; 1)$ .
- (B)  $(-2; 2)$ .
- (C)  $(0; 2)$ .
- (D)  $(3; +\infty)$ .

**Câu 26.16.** Hàm số  $y = f(x)$  có bảng biến thiên như sau

$x$	$-\infty$	$-2$	$1$	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	$0$	$-$	$+$
$f(x)$	$-\infty$	$1$	$-3$	$+\infty$

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng

- (A)  $(2; 3)$ .
- (B)  $(-2; 3)$ .
- (C)  $(-3; +\infty)$ .
- (D)  $(-\infty; 1)$ .

**Câu 26.17.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có bảng biến thiên như sau

$x$	$-\infty$	$-2$	$0$	$2$	$+\infty$
$y'$	$-$	$0$	$+$	$-$	$+$
$y$	$+\infty$	$-2$	$1$	$-2$	$+\infty$

Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

- (A)  $(-\infty; 0)$ .      (B)  $(0; 2)$ .      (C)  $(2; +\infty)$ .      (D)  $(-2; 2)$ .

**Câu 26.18.** Cho hàm số  $f(x)$  có bảng biến thiên như sau

$x$	$-\infty$	$-1$	$0$	$1$	$+\infty$				
$y'$		$-$	$0$	$+$	$0$	$-$	$0$	$+$	
$y$	$+\infty$			$0$			$0$		$+\infty$

$\swarrow$        $\nearrow$        $\searrow$        $\nearrow$   
 $-2$        $-2$

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

- (A)  $(0; 1)$ .      (B)  $(-1; 0)$ .      (C)  $(-2; 0)$ .      (D)  $(0; +\infty)$ .

**Câu 26.19.** Cho hàm số  $y = f(x)$  xác định và liên tục trên khoảng  $(-\infty; +\infty)$ , có bảng biến thiên như hình sau

$x$	$-\infty$	$-1$	$1$	$+\infty$		
$y'$		$+$	$0$	$-$	$0$	$+$
$y$			$2$			$+\infty$

$\swarrow$        $\searrow$        $\nearrow$   
 $-\infty$        $-1$

Mệnh đề nào sau đây đúng?

- (A) Hàm số nghịch biến trên khoảng  $(1; +\infty)$ .  
 (B) Hàm số đồng biến trên khoảng  $(-1; +\infty)$ .  
 (C) Hàm số đồng biến trên khoảng  $(-\infty; -1)$ .  
 (D) Hàm số nghịch biến trên khoảng  $(-\infty; 1)$ .

**Câu 26.20.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có bảng biến thiên như hình vẽ bên dưới

$x$	$-\infty$	$-1$	$+\infty$
$y'$		$+$	$+$
$y$		$+\infty$	$2$

$\swarrow$        $\nearrow$   
 $2$        $-\infty$

Mệnh đề nào sau đây đúng?

- (A) Hàm số đồng biến trên khoảng  $(-\infty; -1)$ .  
 (B) Hàm số đồng biến trên  $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ .  
 (C) Hàm số đồng biến trên  $\mathbb{R}$ .  
 (D) Hàm số đồng biến trên khoảng  $(-\infty; 2)$ .

## **D** BẢNG ĐÁP ÁN

26.1.A	26.2.C	26.3.D	26.4.D	26.5.B	26.6.A	26.7.A	26.8.D	26.9.B	26.10C
26.11B	26.12D	26.13D	26.14A	26.15C	26.16A	26.17B	26.18B	26.19C	26.20A

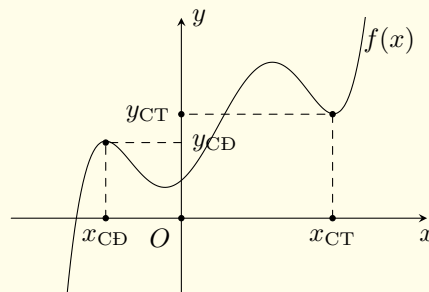
# DẠNG 27. TÌM CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ DỰA VÀO ĐỒ THỊ

## A KIẾN THỨC CẦN NHỚ

### 1. Định nghĩa

Cho hàm số  $y = f(x)$  xác định và liên tục trên khoảng  $(a; b)$  (có thể  $a$  là  $-\infty$ ,  $b$  là  $+\infty$ ) và điểm  $x_0 \in (a; b)$ .

- Nếu tồn tại số  $h > 0$  sao cho  $f(x) < f(x_0)$  với mọi  $x \in (x_0 - h; x_0 + h)$  và  $x \neq x_0$  thì ta nói hàm số  $f(x)$  đạt **cực đại** tại  $x_0$ .
- Nếu tồn tại số  $h > 0$  sao cho  $f(x) > f(x_0)$  với mọi  $x \in (x_0 - h; x_0 + h)$  và  $x \neq x_0$  thì ta nói hàm số  $f(x)$  đạt **cực tiểu** tại  $x_0$ .



### 2. Chú ý

- Nếu hàm số  $f(x)$  đạt cực đại (cực tiểu) tại  $x_0$  thì  $x_0$  được gọi là điểm cực đại (điểm cực tiểu) của hàm số;  $f(x_0)$  được gọi là giá trị cực đại (giá trị cực tiểu) của hàm số, kí hiệu là  $y_{CD}$  ( $y_{CT}$ ), còn điểm  $M(x_0; f(x_0))$  được gọi là điểm cực đại (điểm cực tiểu) của đồ thị.
- Các điểm cực đại và cực tiểu được gọi chung là điểm cực trị.

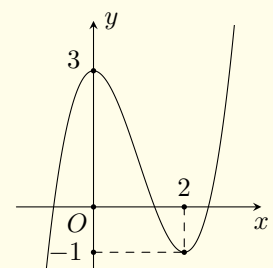
## B BÀI TẬP MẪU

### CÂU 27 (Đề tham khảo BGD 2022-2023).

Cho hàm số bậc ba  $y = f(x)$  có đồ thị là đường cong trong hình bên.

Giá trị cực đại của hàm số đã cho là

- (A) -1.      (B) 3.      (C) 2.      (D) 0.

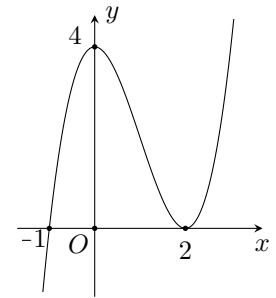


## BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ PHÁT TRIỂN

### Câu 27.1.

Cho hàm số  $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$  có đồ thị như hình vẽ bên. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

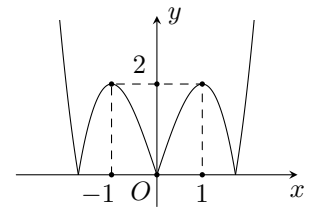
- (A) Hàm số đạt cực đại tại  $x = 0$ . (B) Hàm số đạt cực tiểu tại  $x = 2$ .  
 (C) Hàm số đạt cực đại tại  $x = 4$ . (D) Hàm số có hai điểm cực trị.



### Câu 27.2.

Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  và có đồ thị như hình bên. Hỏi hàm số có bao nhiêu điểm cực trị?

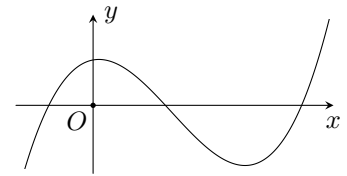
- (A) 2. (B) 3. (C) 4. (D) 5.



### Câu 27.3.

Cho hàm số  $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$  có đồ thị như hình vẽ bên. Hàm số đã cho có bao nhiêu điểm cực trị?

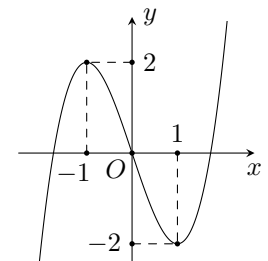
- (A) 2. (B) 1. (C) 3. (D) 4.



### Câu 27.4.

Cho hàm số  $y = f(x)$  có đồ thị như hình vẽ bên. Tìm điểm cực đại của hàm số.

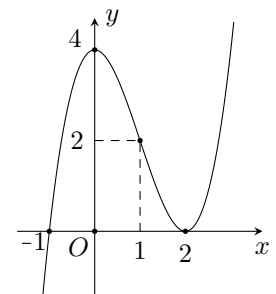
- (A)  $y = -2$ . (B)  $x = -1$ . (C)  $x = 1$ . (D)  $y = 2$ .



### Câu 27.5.

Cho hàm số  $y = f(x)$ . Đồ thị hàm số  $y = f'(x)$  như hình bên. Tìm mệnh đề đúng.

- (A) Hàm số  $y = f(x)$  nghịch biến trên khoảng  $(0; 2)$ .  
 (B) Hàm số  $y = f(x)$  có hai cực trị.  
 (C) Hàm số  $y = f(x)$  đạt cực tiểu tại  $x = 2$ .  
 (D) Hàm số  $y = f(x)$  chỉ có một cực trị.

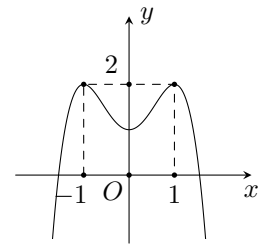


### Câu 27.6.



Cho hàm số  $y = ax^4 + bx^2 + c$ , ( $a \neq 0$ ) có đồ thị như hình vẽ bên. Số điểm cực đại của hàm số là

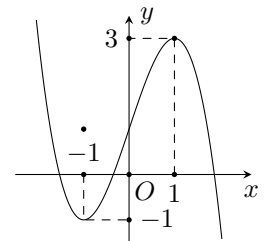
- (A) 3.                      (B) 4.                      (C) 1.                      (D) 2.



**Câu 27.12.**

Cho hàm số  $y = f(x)$  có đồ thị như hình bên. Giá trị cực đại của hàm số bằng

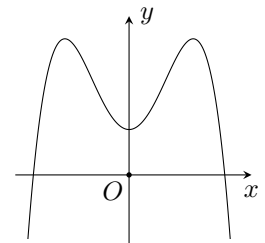
- (A) 1.                      (B) 3.                      (C) 2.                      (D) -1.



**Câu 27.13.**

Cho hàm số có đồ thị như hình vẽ bên. Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

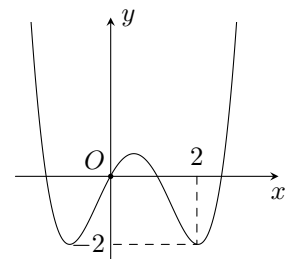
- (A) 1.                      (B) 2.                      (C) 3.                      (D) 0.



**Câu 27.14.**

Cho hàm số  $y = f(x)$  có đồ thị như hình vẽ sau. Khẳng định nào sau đây đúng?

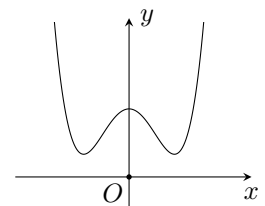
- (A) Hàm số có hai điểm cực trị âm và một điểm cực trị dương.
- (B) Hàm số có hai điểm cực trị dương và một điểm cực trị âm.
- (C) Hàm số đạt cực tiểu tại  $x = -2$ .
- (D) Hàm số đạt cực đại tại  $x = 0$ .



**Câu 27.15.**

Cho hàm số bậc bốn  $y = f(x)$  có đồ thị hàm số như hình bên. Số điểm cực tiểu của hàm số đã cho là

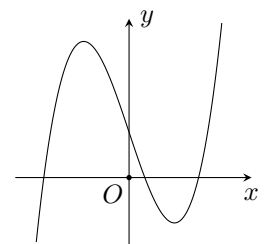
- (A) 2.                      (B) 1.                      (C) 3.                      (D) 0.



**Câu 27.16.**

Cho hàm số  $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$  ( $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ ), có đồ thị như hình vẽ bên. Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

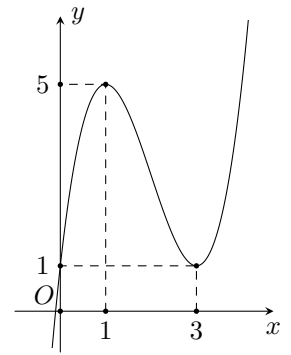
- (A) 2.                      (B) 0.                      (C) 3.                      (D) 1.



**Câu 27.17.**

Cho hàm số  $y = f(x)$  có đồ thị như hình vẽ dưới đây. Giá trị cực tiểu của hàm số là

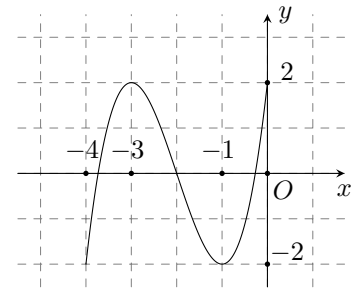
- (A) 2.                      (B) 0.                      (C) 5.                      (D) 1.



**Câu 27.18.**

Cho hàm số  $y = f(x)$  xác định, liên tục trên đoạn  $[-4; 0]$  và có đồ thị là đường cong trong hình vẽ bên. Hàm số  $f(x)$  đạt cực tiểu tại điểm nào dưới đây?

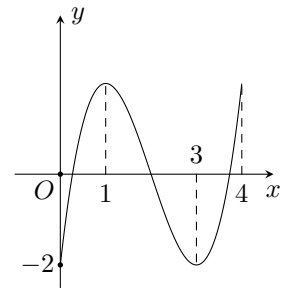
- (A)  $x = -2$ .              (B)  $x = -1$ .              (C)  $x = -3$ .              (D)  $x = 2$ .



**Câu 27.19.**

Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên đoạn  $[0; 4]$  có đồ thị như hình vẽ bên. Mệnh đề nào sau đây đúng?

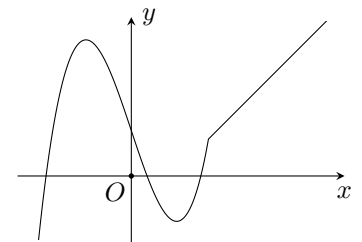
- (A) Hàm số đạt cực tiểu tại  $x = 3$ .      (B) Hàm số đạt cực tiểu tại  $x = 0$ .  
 (C) Hàm số đạt cực đại tại  $x = 4$ .      (D) Hàm số đạt cực đại tại  $x = 2$ .



**Câu 27.20.**

Cho hàm số  $f(x)$  có đồ thị như hình vẽ bên. Số điểm cực đại của hàm số đã cho là

- (A) 0.                      (B) 1.                      (C) 2.                      (D) 3.



**(D) BẢNG ĐÁP ÁN**

27.1. C	27.2. D	27.3. A	27.4. B	27.5. D	27.6. C	27.7. D	27.8. B
27.9. A	27.10. B	27.11. D	27.12. B	27.13. C	27.14. B	27.15. A	27.16. A
27.17. D	27.18. B	27.19. A	27.20. B				



## DẠNG 28. LÔGARIT

### A KIẾN THỨC CẦN NHỚ

- Cho hai số dương  $a, b$  với  $a \neq 1$ . Số  $\alpha$  thỏa mãn đẳng thức  $a^\alpha = b$  được gọi là lôgarit cơ số  $a$  của  $b$  và kí hiệu là  $\log_a b$ . Ta viết  $\alpha = \log_a b \Leftrightarrow a^\alpha = b$

a)  $\log_a a = 1, \log_a 1 = 0$

- $a^{\log_a b} = b, \log_a(a^\alpha) = \alpha$

b) Lôgarit của một tích: Cho 3 số dương  $a, b_1, b_2$  với  $a \neq 1$ , ta có:

- $\log_a(b_1 b_2) = \log_a b_1 + \log_a b_2$

c) Lôgarit của một thương: Cho 3 số dương  $a, b_1, b_2$  với  $a \neq 1$ , ta có:

- $\log_a \frac{b_1}{b_2} = \log_a b_1 - \log_a b_2$

- Đặc biệt: với  $a, b > 0, a \neq 1 \log_a \frac{1}{a} = -\log_a b$

d) Lôgarit của lũy thừa: Cho  $a, b > 0, a \neq 1$ , với mọi  $\alpha$  ta có:

- $\log_a b^\alpha = \alpha \log_a b$

e) Công thức đổi cơ số: Cho 3 số dương  $a, b, c$  với  $a \neq 1, c \neq 1$ , ta có:

- $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$

f) Lôgarit thập phân và Lôgarit tự nhiên

- Lôgarit thập phân là lôgarit cơ số 10

Viết:  $\log_{10} b = \log b = \lg b$

- Lôgarit tự nhiên và lôgarit cơ số  $e$

Viết:  $\log_e b = \ln b$  với  $e \approx 2,71828 \dots$

### B BÀI TẬP MẪU

#### CÂU 28 (Đề tham khảo BGD 2022-2023).

Với  $a$  là số thực dương tùy ý,  $\ln(3a) - \ln(2a)$  bằng

A  $\ln a$ .

B  $\ln \frac{2}{3}$ .

C  $\ln(6a^2)$ .

D  $\ln \frac{3}{2}$ .

**Câu 28.1.** Với  $a$  là số nguyên dương tùy ý,  $\log_{\frac{1}{2}} a^3$  bằng

- (A)  $-3 \log_2 a$ .      (B)  $3 - \log_2 a$ .      (C)  $\frac{3}{2} \log_2 a$ .      (D)  $3 \log_2 a$ .

**Câu 28.2.** Với  $a$  là số thực dương tùy ý,  $\log_3 \sqrt{a}$  bằng

- (A)  $\frac{1}{2} \log_3 a$ .      (B)  $\frac{1}{2} + \log_3 a$ .      (C)  $2 \log_3 a$ .      (D)  $-\frac{1}{2} \log_3 a$ .

**Câu 28.3.** Với  $a$  là số thực dương tùy ý,  $\log_3 \left(\frac{3}{a}\right)$  bằng

- (A)  $1 - \log_3 a$ .      (B)  $3 - \log_3 a$ .      (C)  $\frac{1}{\log_3 a}$ .      (D)  $1 + \log_3 a$ .

**Câu 28.4.** Với  $a$  là số thực dương khác 1, giá trị  $\log_a (a^3 \sqrt[4]{a})$  bằng

- (A)  $\frac{3}{4}$ .      (B) 7.      (C) 12.      (D)  $\frac{13}{4}$ .

**Câu 28.5.** Với mọi  $a, b, x$  là các số thực dương thoả mãn  $\log_2 x = 5 \log_2 a + 3 \log_2 b$ . Mệnh đề nào dưới đây đúng

- (A)  $x = 5a + 3b$ .      (B)  $x = a^5 + b^3$ .      (C)  $x = a^5 b^3$ .      (D)  $x = 3a + 5b$ .

**Câu 28.6.** Cho  $0 < a \neq 1$ . Giá trị của biểu thức  $A = \log_a (a^3 \sqrt[7]{a^7})$  là

- (A) 3.      (B)  $\frac{7}{2}$ .      (C)  $\frac{13}{2}$ .      (D)  $\frac{5}{3}$ .

**Câu 28.7.** Cho hai số thực dương  $x, y > 1$  thoả mãn  $y = x\sqrt{x}$ . Giá trị của  $\log_x (x^2 y)$  bằng

- (A)  $\frac{5}{2}$ .      (B)  $\frac{8}{3}$ .      (C) 3.      (D)  $\frac{7}{2}$ .

**Câu 28.8.** Với  $a$  là số thực dương tùy ý,  $\log_2 \left(\frac{a^2}{4}\right)$  bằng

- (A)  $2(1 - \log_2 a)$ .      (B)  $2 \log_2 a - 1$ .      (C)  $2(\log_2 a - 1)$ .      (D)  $2(\log_2 a + 1)$ .

**Câu 28.9.** Cho  $a$  là số thực dương  $a \neq 1$  và  $\log_{\sqrt[3]{a}} a^3$ . Mệnh đề nào sau đây đúng?

- (A)  $P = 1$ .      (B)  $P = 9$ .      (C)  $P = \frac{1}{3}$ .      (D)  $P = 3$ .

**Câu 28.10.** Với  $a, b$  là hai số thực dương tùy ý,  $\log_3 (a^3 \sqrt{b})$  bằng

- (A)  $3 \log_3 a + \frac{1}{2} \log_3 b$ .      (B)  $3 \log_3 a + 2 \log_3 b$ .      (C)  $\frac{3}{2} \log_3 (ab)$ .      (D)  $\frac{3}{2} \log_3 (a + b)$ .

**Câu 28.11.** Xét tất cả các số thực dương  $a$  và  $b$  thoả mãn  $\log_3 a = \log_{27} (a^2 \sqrt{b})$ . Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?

- (A)  $a = b$ .      (B)  $a^2 = b$ .      (C)  $a = b^2$ .      (D)  $a^3 = b$ .

**Câu 28.12.** Với  $a$  là số thực dương tùy ý,  $\log_2 a^2$  bằng

- (A)  $\frac{1}{2} \log_2 a$ .      (B)  $2 + \log_2 a$ .      (C)  $2 \log_2 a$ .      (D)  $\frac{1}{2} + \log_2 a$ .

**Câu 28.13.** Với  $a$  là số thực dương tùy ý,  $\log_{\frac{1}{3}} (9a^2)$  bằng

- (A)  $-2 - 2 \log_3 a$ .      (B)  $-2 - 2 \log_{\frac{1}{3}} a$ .      (C)  $2 + 2 \log_{\frac{1}{3}} a$ .      (D)  $2 + 2 \log_3 a$ .

**Câu 28.14.** Cho  $0 < a \neq 1$ . Giá trị của biểu thức  $P = \log_a (a \cdot \sqrt[3]{a^2})$  là

- (A) 3.      (B)  $\frac{5}{3}$ .      (C)  $\frac{5}{2}$ .      (D)  $\frac{4}{3}$ .

**Câu 28.15.** Cho  $a$  là số thực dương tùy ý. Giá trị của  $\log_2(4a^2)$  bằng

- (A)  $4 + \frac{1}{2} \log_2 a$ .      (B)  $2(\log_2 a + 1)$ .      (C)  $2 + \log_2 a$ .      (D)  $8 \log_2 a$ .

**Câu 28.16.** Cho  $a$  là số thực dương tùy ý,  $\ln\left(\frac{e}{a^2}\right)$  bằng

- (A)  $1 + 2 \ln a$ .      (B)  $1 - 2 \ln a$ .      (C)  $1 + \ln(2a)$ .      (D)  $1 - \ln(2a)$ .

**Câu 28.17.** Cho  $a$  và  $b$  là hai số thực dương thỏa mãn  $\sqrt{a} \cdot b^3 = 27$ . Giá trị của  $\log_3 a + 6 \log_3 b$  bằng

- (A) 3.      (B) 6.      (C) 9.      (D) 1.

**Câu 28.18.** Giá trị của  $\log_2(4\sqrt{2})$  bằng

- (A)  $\frac{5}{2}$ .      (B) 4.      (C) 3.      (D)  $\frac{3}{2}$ .

**Câu 28.19.** Với  $a$  là số thực dương khác 1,  $\log_{a^2}(a\sqrt{a})$  bằng

- (A)  $\frac{1}{4}$ .      (B)  $\frac{3}{4}$ .      (C) 3.      (D)  $\frac{3}{2}$ .

**Câu 28.20.** Cho  $a, b$  là các số thực dương và  $a$  khác 1, thỏa mãn  $\log_{a^3}\left(\frac{a^5}{\sqrt[4]{b}}\right) = 2$ . Giá trị của biểu thức  $\log_a b$  bằng

- (A)  $\frac{1}{4}$ .      (B)  $-\frac{1}{4}$ .      (C) 4.      (D) -4.

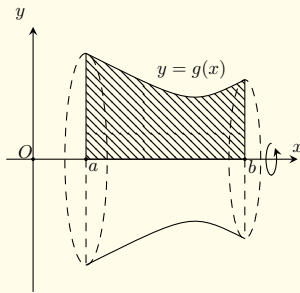
### **C** BẢNG ĐÁP ÁN

28.1. B	28.2. A	28.3. A	28.4. D	28.5. C	28.6. C	28.7. D	28.8. C
28.9. B	28.10. A	28.11. B	28.12. C	28.13. A	28.14. B	28.15. B	28.16. B
28.17. B	28.18. A	28.19. B	28.20. D				

## DẠNG 29. ỨNG DỤNG TÍCH PHÂN TÍNH THỂ TÍCH VẬT THỂ TRÒN XOAY

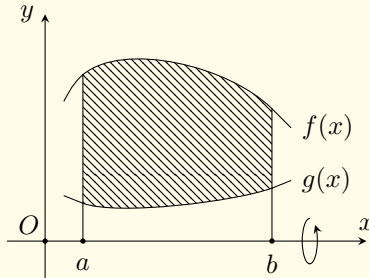
### A KIẾN THỨC CẦN NHỚ

- Thể tích khối tròn xoay được sinh ra khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường  $y = f(x)$ , trục hoành và hai đường thẳng  $x = a, x = b$  quanh trục  $Ox$



$$\left\{ \begin{array}{l} (C): y = f(x) \\ (Ox): y = 0 \\ x = a \\ x = b \end{array} \right. \quad \boxed{V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx}$$

- Thể tích khối tròn xoay được sinh ra khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường  $y = f(x)$ ,  $y = g(x)$  (cùng nằm một phía so với  $Ox$ ) và hai đường thẳng  $x = a, x = b$  quanh trục  $Ox$ :



$$\boxed{V = \pi \int_a^b |f^2(x) - g^2(x)| dx}$$

### B BÀI TẬP MẪU

#### CÂU 29 (Đề tham khảo BGD 2022-2023).

Thể tích khối tròn xoay thu được khi quay hình phẳng giới hạn bởi hai đường  $y = -x^2 + 2x$  và  $y = 0$  quanh trục  $Ox$  bằng

(A)  $\frac{16}{15}$ .

(B)  $\frac{16\pi}{9}$ .

(C)  $\frac{16}{9}$ .

(D)  $\frac{16\pi}{15}$ .

### C BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ PHÁT TRIỂN

**Câu 29.1.** Cho hình phẳng  $\mathcal{D}$  giới hạn bởi đường cong  $y = e^x$ , trục hoành và các đường thẳng  $x = 0, x = 1$ . Khối tròn xoay tạo thành khi quay  $\mathcal{D}$  quanh trục hoành có thể tích  $V$  bằng bao nhiêu?

A  $V = \frac{\pi(e^2 + 1)}{2}$ .    
  B  $V = \frac{\pi(e^2 - 1)}{2}$ .    
  C  $\frac{\pi e^2}{2}$ .    
  D  $V = \frac{e^2 - 1}{2}$ .

**Câu 29.2.** Cho hình phẳng  $\mathcal{D}$  giới hạn bởi các đường  $y = \sqrt{2019x + 2020}$ , trục  $Ox$  và hai đường thẳng  $x = 0$ ;  $x = 1$ . Gọi  $V$  là thể tích của khối tròn xoay được tạo thành khi quay  $\mathcal{D}$  quanh trục  $Ox$ . Khẳng định nào sau đây đúng?

A  $V = \int_0^1 (2019x + 2020) dx$ .    
  B  $V = \pi \int_0^1 (2019x + 2020) dx$ .  
 C  $V = \int_0^1 \sqrt{2019x + 2020} dx$ .    
  D  $V = \pi \int_0^1 \sqrt{2019x + 2020} dx$ .

**Câu 29.3.** Cho hình phẳng  $\mathcal{H}$  giới hạn bởi đồ thị hàm số  $y = x \cdot \ln x$ , trục hoành và hai đường thẳng  $x = 1$ ;  $x = 2$ . Thể tích vật thể tròn xoay sinh bởi  $\mathcal{H}$  khi nó quay quanh trục hoành có thể tích  $V$  được xác định bởi

A  $V = \pi \int_1^2 (x \cdot \ln x) dx$ .    
  B  $V = \int_1^2 (x \cdot \ln x) dx$ .  
 C  $V = \int_1^2 (x \cdot \ln x)^2 dx$ .    
  D  $V = \pi \int_1^2 (x \cdot \ln x)^2 dx$ .

**Câu 29.4.** Gọi  $\mathcal{D}$  là hình phẳng giới hạn bởi các đường  $y = \frac{x}{4}$ ,  $y = 0$ ,  $x = 1$ ,  $x = 4$ . Tính thể tích vật thể tròn xoay tạo thành khi quay hình  $\mathcal{D}$  quanh trục  $Ox$ .

A  $\frac{15\pi}{8}$ .    
  B  $\frac{21\pi}{16}$ .    
  C  $\frac{21}{16}$ .    
  D  $\frac{15}{16}$ .

**Câu 29.5.** Cho hình phẳng  $\mathcal{H}$  giới hạn bởi các đường  $y = x^2 + 3$ ,  $y = 0$ ,  $x = 1$ ,  $x = 3$ . Gọi  $V$  là thể tích của khối tròn xoay được tạo thành khi quay  $\mathcal{H}$  xung quanh trục  $Ox$ . Mệnh đề nào sau đây đúng?

A  $V = \int_1^3 (x^2 + 3) dx$ .    
  B  $V = \pi \int_1^3 (x^2 + 3) dx$ .  
 C  $V = \pi \int_1^3 (x^2 + 3)^2 dx$ .    
  D  $V = \int_1^3 (x^2 + 3)^2 dx$ .

**Câu 29.6.** Cho hình phẳng  $\mathcal{D}$  được giới hạn bởi các đường  $f(x) = \sqrt{2x + 1}$ ,  $Ox$ ,  $x = 0$ ,  $x = 1$ . Gọi  $V$  là thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay  $\mathcal{D}$  xung quanh trục  $Ox$ . Khẳng định nào sau đây đúng?

A  $V = \pi \int_0^1 \sqrt{2x + 1} dx$ .    
  B  $V = \int_0^1 (2x + 1) dx$ .  
 C  $V = \pi \int_0^1 (2x + 1) dx$ .    
  D  $V = \int_0^1 \sqrt{2x + 1} dx$ .

**Câu 29.7.** Thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường  $y = x \cdot e^x$ ,  $y = 0$ ,  $x = 0$ ,  $x = 1$  xung quanh trục  $Ox$  là

A  $V = \pi \int_0^1 x e^x dx$ .    
  B  $V = \pi \int_0^1 x^2 e^{2x} dx$ .    
  C  $V = \pi \int_0^1 x^2 e^x dx$ .    
  D  $V = \int_0^1 x^2 e^{2x} dx$ .

**Câu 29.8.** Thể tích khối tròn xoay sinh ra khi quay quanh trục hoành hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số  $y = e^{\frac{x}{2}}$ , trục hoành, trục tung và đường thẳng  $x = 2$  bằng

- (A)  $\pi e^2$ .                      (B)  $e^2 - 1$ .                      (C)  $\pi (e^2 - 1)$ .                      (D)  $\pi (e - 1)$ .

**Câu 29.9.** Cho hình phẳng  $\mathcal{H}$  được giới hạn bởi các đường  $x = 0$ ,  $x = \pi$ ,  $y = 0$  và  $y = -\cos x$ . Gọi  $V$  là thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay  $\mathcal{H}$  xung quanh trục  $Ox$ . Khẳng định nào sau đây đúng?

- (A)  $V = \pi \int_0^{\pi} \cos^2 x \, dx$ .                      (B)  $V = \pi \left| \int_0^{\pi} (-\cos x) \, dx \right|$ .  
 (C)  $V = \pi \int_0^{\pi} |\cos x| \, dx$ .                      (D)  $V = \int_0^{\pi} \cos^2 x \, dx$ .

**Câu 29.10.** Cho hình phẳng  $\mathcal{H}$  giới hạn bởi các đường  $y = x^3 - x + 1$ ,  $y = 0$ ,  $x = 0$ ,  $x = 2$ . Gọi  $V$  là thể tích khối tròn xoay được tạo thành khi quay  $\mathcal{H}$  xung quanh trục  $Ox$ . Mệnh đề nào sau đây đúng?

- (A)  $V = \pi \int_0^2 (x^3 - x^2 + 1) \, dx$ .                      (B)  $V = \pi \int_0^2 (x^3 - x + 1) \, dx$ .  
 (C)  $V = \int_0^2 (x^3 - x + 1)^2 \, dx$ .                      (D)  $V = \pi \int_0^2 (x^3 - x + 1)^2 \, dx$ .

**Câu 29.11.** Cho hình phẳng  $\mathcal{H}$  giới hạn bởi đồ thị hàm số  $y = \frac{1}{x}$  và các đường thẳng  $y = 0$ ,  $x = 1$ ,  $x = 4$ . Thể tích  $V$  của khối tròn xoay sinh ra khi cho hình phẳng  $\mathcal{H}$  quay quanh trục  $Ox$  bằng

- (A)  $\frac{3}{4}$ .                      (B)  $2 \ln 2$ .                      (C)  $2\pi \ln 2$ .                      (D)  $\frac{3\pi}{4}$ .

**Câu 29.12.** Cho hình phẳng  $\mathcal{D}$  được giới hạn bởi các đường  $x = 0$ ,  $x = 1$ ,  $y = 0$  và  $y = \sqrt{2x + 1}$ . Gọi  $V$  là thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay  $\mathcal{D}$  xung quanh trục  $Ox$ . Mệnh đề nào sau đây đúng?

- (A)  $V = \pi \int_0^1 (2x + 1) \, dx$ .                      (B)  $V = \int_0^1 (2x + 1) \, dx$ .  
 (C)  $V = \int_0^1 \sqrt{2x + 1} \, dx$ .                      (D)  $V = \pi \int_0^1 \sqrt{2x + 1} \, dx$ .

**Câu 29.13.** Cho hình phẳng  $\mathcal{H}$  được giới hạn bởi đồ thị hàm số  $y = \sqrt{x}$  và các đường thẳng  $x = 0$ ;  $x = 1$  và trục hoành. Tính thể tích  $V$  của khối tròn xoay sinh bởi hình  $\mathcal{H}$  quay xung quanh trục  $Ox$ .

- (A)  $\frac{\pi}{2}$ .                      (B)  $\sqrt{\pi}$ .                      (C)  $\frac{\pi}{3}$ .                      (D)  $\pi$ .

**Câu 29.14.** Gọi  $\mathcal{H}$  là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số  $y = e^x$ , trục  $Ox$  và hai đường thẳng  $x = 0$ ,  $x = 1$ . Thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay  $\mathcal{H}$  xung quanh trục  $Ox$  bằng

- (A)  $\frac{\pi}{2} (e^2 + 1)$ .                      (B)  $\pi (e^2 - 1)$ .                      (C)  $\frac{\pi}{2} (e^2 - 1)$ .                      (D)  $\pi (e^2 + 1)$ .

**Câu 29.15.** Cho hình phẳng  $\mathcal{D}$  giới hạn bởi đồ thị hàm số  $y = \sin x$ , trục hoành và hai đường thẳng  $x = 0$ ;  $x = \pi$ . Thể tích khối tròn xoay thu được khi quay  $\mathcal{D}$  quanh trục  $Ox$  bằng

- (A)  $\frac{\pi^2}{2}$ .                      (B)  $\frac{\pi^2}{4}$ .                      (C)  $\frac{\pi}{4}$ .                      (D)  $\frac{\pi}{2}$ .

**Câu 29.16.** Tính thể tích khối tròn xoay được tạo thành khi quay hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số  $y = 3x - x^2$  và trục hoành, quanh trục hoành.

- (A)  $\frac{41\pi}{7}$ .                      (B)  $\frac{8\pi}{7}$ .                      (C)  $\frac{81\pi}{10}$ .                      (D)  $\frac{85\pi}{10}$ .

**Câu 29.17.** Tính thể tích vật thể tròn xoay tạo thành khi cho hình phẳng giới hạn bởi các đường parabol  $y = x^2$ , trục hoành và đường thẳng  $x = 1$  quay xung quanh trục  $Ox$ .

- (A)  $\frac{1}{5}$ .                      (B)  $\frac{1}{3}$ .                      (C)  $\frac{\pi}{5}$ .                      (D)  $\frac{\pi}{3}$ .

**Câu 29.18.** Cho hình phẳng  $\mathcal{D}$  giới hạn bởi đường cong  $y = \sqrt{2 + \cos x}$ , trục hoành và các đường thẳng  $x = 0, x = \frac{\pi}{2}$ . Khối tròn xoay tạo thành khi cho  $\mathcal{D}$  quay quanh trục hoành có thể tích  $V$  bằng bao nhiêu?

- (A)  $V = (\pi - 1)\pi$ .                      (B)  $V = (\pi + 1)\pi$ .                      (C)  $V = \pi - 1$ .                      (D)  $V = \pi + 1$ .

**Câu 29.19.** Kí hiệu  $\mathcal{H}$  là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số  $y = 2x - x^2$  và  $y = 0$ . Tính thể tích vật thể tròn xoay được sinh ra bởi hình phẳng  $\mathcal{H}$  khi quay quanh trục  $Ox$ .

- (A)  $\frac{19\pi}{15}$ .                      (B)  $\frac{17\pi}{15}$ .                      (C)  $\frac{18\pi}{15}$ .                      (D)  $\frac{16\pi}{15}$ .

**Câu 29.20.** Cho hình phẳng  $\mathcal{H}$  giới hạn bởi các đường  $y = \cos x, y = 0, x = 0, x = \frac{\pi}{4}$ . Thể tích của khối tròn xoay được tạo thành khi quay  $\mathcal{H}$  xung quanh trục  $Ox$  bằng

- (A)  $\frac{\pi + 2}{8}$ .                      (B)  $\frac{\pi(\pi + 2)}{8}$ .                      (C)  $\frac{\pi^2 + 1}{4}$ .                      (D)  $\frac{\pi(\pi + 2)}{4}$ .

**(D) BẢNG ĐÁP ÁN**

29.1. B	29.2. B	29.3. D	29.4. B	29.5. C	29.6. C	29.7. B	29.8. C
29.9. A	29.10. D	29.11. D	29.12. A	29.13. A	29.14. C	29.15. A	29.16. C
29.17. C	29.18. B	29.19. D	29.20. B				

# DẠNG 30. GÓC GIỮA HAI MẶT PHẪNG TRONG KHÔNG GIAN

## A KIẾN THỨC CẦN NHỚ

### 1. Góc giữa hai mặt phẳng

#### 1.1. Khái niệm

- Góc giữa 2 mặt phẳng là góc được tạo bởi hai đường thẳng lần lượt vuông góc với hai mặt phẳng đó.
- Trong không gian 3 chiều, góc giữa 2 mặt phẳng còn được gọi là ‘góc khối’, là phần không gian bị giới hạn bởi 2 mặt phẳng. Góc giữa 2 mặt phẳng được đo bằng góc giữa 2 đường thẳng trên mặt 2 phẳng có cùng trục giao với giao tuyến của 2 mặt phẳng.

#### 1.2. Tính chất

- Góc giữa 2 mặt phẳng song song bằng 0 độ;
- Góc giữa 2 mặt phẳng trùng nhau bằng 0 độ.

### 2. Cách xác định góc giữa 2 mặt phẳng

Để có thể xác định chính xác góc giữa 2 mặt phẳng, chúng ta thường áp dụng những cách sau: Gọi  $P$  là mặt phẳng 1,  $Q$  là mặt phẳng 2.

- **Trường hợp 1:** Hai mặt phẳng  $(P)$ ,  $(Q)$  song song hoặc trùng nhau thì góc của 2 mặt phẳng bằng  $0^\circ$ ;
- **Trường hợp 2:** Hai mặt phẳng  $(P)$ ,  $(Q)$  không song song hoặc trùng nhau.
  - *Cách 1:* Dụng 2 đường thẳng  $n$  và  $p$  vuông góc lần lượt với 2 mặt phẳng  $(P)$ ,  $(Q)$ . Khi đó góc giữa 2 mặt phẳng  $(P)$ ,  $(Q)$  là góc giữa 2 đường thẳng  $n$  và  $p$ .
  - *Cách 2:* Để xác định góc giữa 2 mặt phẳng đầu tiên bạn cần xác định giao tuyến  $\Delta$  của 2 mặt phẳng  $(P)$  và  $(Q)$ . Tiếp theo, bạn tìm một mặt phẳng  $(R)$  vuông góc với giao tuyến  $\Delta$  của 2 mặt phẳng  $(P)$ ,  $(Q)$  và cắt 2 mặt phẳng tại các giao tuyến  $a, b$ . Khi đó, góc giữa 2 mặt phẳng  $(P)$ ,  $(Q)$  là góc giữa  $a$  và  $b$ .

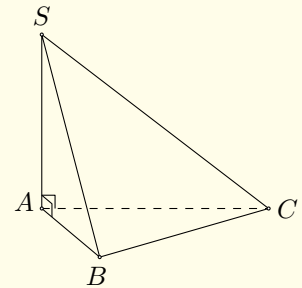


**B BÀI TẬP MẪU**

**CÂU 30 (Đề tham khảo BGD 2022-2023).**

Cho hình chóp  $S.ABC$  có đáy là tam giác vuông tại  $B$ ,  $SA$  vuông góc với đáy và  $SA = AB$  (tham khảo hình bên). Góc giữa hai mặt phẳng  $(SBC)$  và  $(ABC)$  bằng

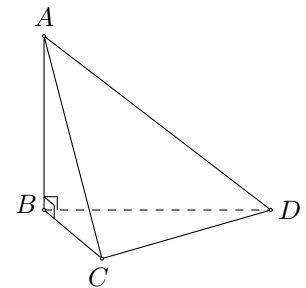
- (A)  $60^\circ$ .
- (B)  $30^\circ$ .
- (C)  $90^\circ$ .
- (D)  $45^\circ$ .



**C BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ PHÁT TRIỂN**

**Câu 30.1.** Cho tứ diện  $ABCD$  có  $AB \perp (BCD)$ . Góc giữa hai mặt phẳng  $(ABC)$  và  $(BCD)$  là

- (A)  $90^\circ$ .
- (B)  $45^\circ$ .
- (C)  $60^\circ$ .
- (D)  $120^\circ$ .

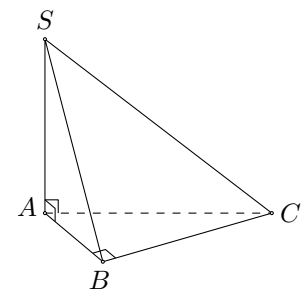


**Câu 30.2.** Gọi  $\alpha$  là số đo góc giữa hai mặt phẳng  $(P)$  và  $(Q)$ . Nếu  $(P)$  và  $(Q)$  song song nhau thì  $\alpha$  bằng

- (A)  $45^\circ$ .
- (B)  $90^\circ$ .
- (C)  $60^\circ$ .
- (D)  $0^\circ$ .

**Câu 30.3.** Cho hình chóp  $SABC$  có  $SA \perp (ABC)$  và  $AB \perp BC$ . Góc giữa hai mặt phẳng  $(SBC)$  và  $(ABC)$  là góc nào sau đây?

- (A)  $\widehat{ASB}$ .
- (B)  $\widehat{SCB}$ .
- (C)  $\widehat{SBA}$ .
- (D)  $\widehat{SCA}$ .



**Câu 30.4.** Cho hình chóp tứ giác đều  $S.ABCD$  có đáy là  $ABCD$  và độ dài các cạnh đáy bằng  $a$ ,  $SA = SB = SC = SD = a$ . Tính  $\cos$  góc giữa hai mặt phẳng  $(SAB)$  và  $(SAD)$ .

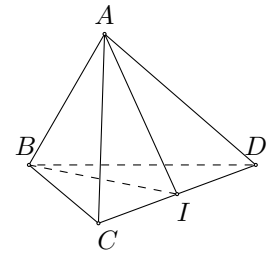
- (A) 0.
- (B)  $\frac{1}{3}$ .
- (C)  $\frac{1}{2}$ .
- (D)  $\frac{\sqrt{3}}{2}$ .

**Câu 30.5.** Gọi  $\alpha$  là số đo góc giữa hai mặt phẳng  $(P)$  và  $(Q)$ . Nếu  $(P)$  và  $(Q)$  trùng nhau thì  $\alpha$  bằng

- (A)  $180^\circ$ .
- (B)  $90^\circ$ .
- (C)  $60^\circ$ .
- (D)  $0^\circ$ .

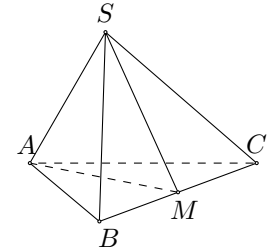
**Câu 30.6.** Cho tứ diện  $ABCD$  có  $AC = AD$  và  $BC = BD$ . Gọi  $I$  là trung điểm của  $CD$ . Khẳng định nào sau đây sai?

- (A)  $(ACD) \perp (AIB)$ .
- (B) Góc giữa 2 mặt phẳng  $(ACD)$  và  $(BCD)$  là góc  $(AI; BI)$ .
- (C)  $(BCD) \perp (AIB)$ .
- (D) Góc giữa 2 mặt phẳng  $(ABC)$  và  $(ABD)$  là góc  $(CI; DI)$ .



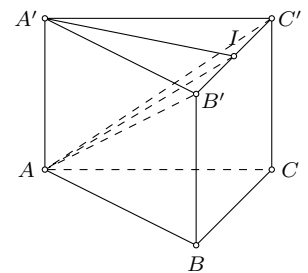
**Câu 30.7.** Cho hình chóp  $S.ABC$  có đáy  $ABC$  là tam giác vuông cân tại  $A$  và  $AB = a\sqrt{2}$ . Biết  $SA \perp (ABC)$  và  $SA = a$ . Góc giữa hai mặt phẳng  $(SBC)$  và  $(ABC)$  bằng

- (A)  $60^\circ$ .
- (B)  $90^\circ$ .
- (C)  $45^\circ$ .
- (D)  $30^\circ$ .



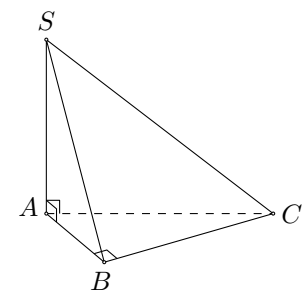
**Câu 30.8.** Cho hình lăng trụ đều  $ABC.A'B'C'$  có cạnh đáy bằng  $2a$ , cạnh bên bằng  $a$ . Tính góc giữa hai mặt phẳng  $(AB'C')$  và  $(A'B'C')$ .

- (A)  $\frac{\pi}{2}$ .
- (B)  $\frac{3\pi}{2}$ .
- (C)  $\frac{\pi}{6}$ .
- (D)  $\frac{\pi}{3}$ .



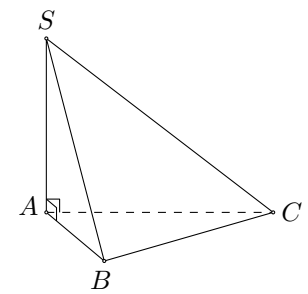
**Câu 30.9.** Cho hình chóp  $S.ABC$  có tam giác  $ABC$  vuông cân tại  $B$ ,  $AB = BC = a$ ,  $SA = a\sqrt{3}$ ,  $SA \perp (ABC)$ . Góc giữa hai mặt phẳng  $(SBC)$  và  $(ABC)$  là

- (A)  $60^\circ$ .
- (B)  $90^\circ$ .
- (C)  $30^\circ$ .
- (D)  $45^\circ$ .



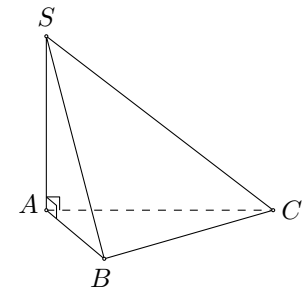
**Câu 30.10.** Cho hình chóp  $S.ABC$  có cạnh  $SA$  vuông góc với mặt phẳng  $(ABC)$ , biết  $AB = AC = a$ ,  $BC = a\sqrt{3}$ . Tính góc giữa hai mặt phẳng  $(SAB)$  và  $(SAC)$ .

- (A)  $60^\circ$ .
- (B)  $45^\circ$ .
- (C)  $30^\circ$ .
- (D)  $90^\circ$ .



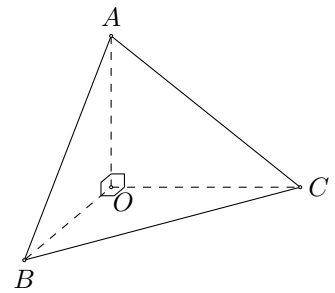
**Câu 30.11.** Cho hình chóp  $S.ABC$  có đáy là tam giác đều cạnh  $a$ ,  $SA \perp (ABC)$ , góc giữa hai mặt phẳng  $(ABC)$  và  $(SBC)$  là  $60^\circ$ . Độ dài cạnh  $SA$  bằng

- (A)  $\frac{a}{\sqrt{3}}$ .
- (B)  $\frac{a}{2}$ .
- (C)  $a\sqrt{3}$ .
- (D)  $\frac{3a}{2}$ .



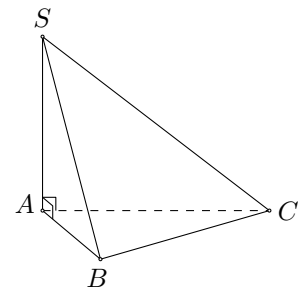
**Câu 30.12.** Cho tứ diện  $OABC$  có  $OA, OB, OC$  đôi một vuông góc và  $OB = OC = a\sqrt{6}, OA = a$ . Tính góc giữa hai mặt phẳng  $(ABC)$  và  $(OBC)$ .

- (A)  $90^\circ$ .      (B)  $60^\circ$ .      (C)  $30^\circ$ .      (D)  $45^\circ$ .



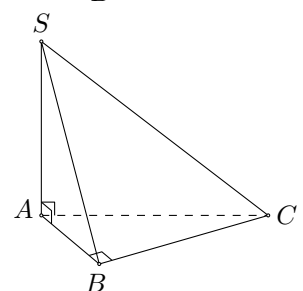
**Câu 30.13.** Cho hình chóp  $S.ABC$  có cạnh  $SA$  vuông góc với mặt phẳng  $(ABC)$ , biết  $AB = AC = a, BC = a\sqrt{3}$ . Tính góc giữa hai mặt phẳng  $(SAB)$  và  $(SAC)$ .

- (A)  $60^\circ$ .      (B)  $150^\circ$ .      (C)  $30^\circ$ .      (D)  $120^\circ$ .



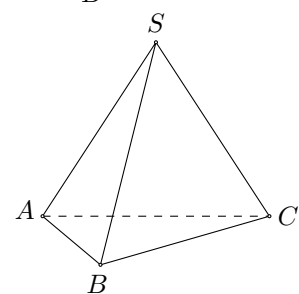
**Câu 30.14.** Cho hình chóp  $S.ABC$  có  $SA \perp (ABC)$  và  $AB \perp BC$ , gọi  $I$  là trung điểm  $BC$ . Góc giữa hai mặt phẳng  $(SBC)$  và  $(ABC)$  là góc nào sau đây?

- (A)  $\widehat{SIA}$ .      (B)  $\widehat{SBA}$ .      (C)  $\widehat{SCA}$ .      (D)  $\widehat{SCB}$ .



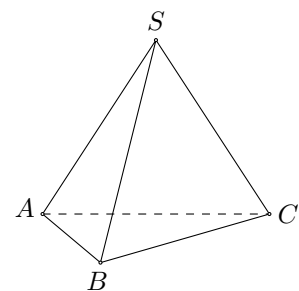
**Câu 30.15.** Cho hình chóp tam giác đều có cạnh đáy bằng  $a$ . Góc giữa cạnh bên và mặt đáy bằng  $60^\circ$  (tham khảo hình vẽ bên). Cosin của góc giữa mặt bên và mặt đáy của hình chóp là.

- (A)  $\frac{1}{\sqrt{13}}$ .      (B)  $\frac{1}{2\sqrt{3}}$ .      (C)  $\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{13}}$ .      (D)  $\frac{1}{\sqrt{3}}$ .



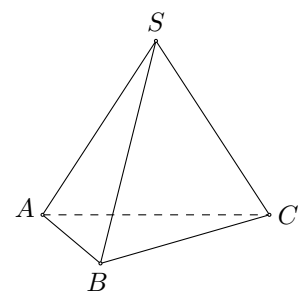
**Câu 30.16.** Cho tứ diện đều  $ABCD$ . Cosin của góc giữa hai mặt phẳng  $(ABC)$  và  $(DBC)$  bằng

- (A)  $\frac{\sqrt{3}}{2}$ .      (B)  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ .      (C)  $\frac{1}{2}$ .      (D)  $\frac{1}{3}$ .



**Câu 30.17.** Cho khối chóp  $S.ABC$  có mặt đáy  $ABC$  là tam giác cân tại  $A$  với  $BC = 2a$ , góc  $\widehat{BAC} = 120^\circ$ . Biết cạnh bên  $SA$  vuông góc với mặt đáy và thể tích khối chóp  $S.ABC$  bằng  $\frac{a^3}{9}$ . Tính góc hợp bởi mặt phẳng  $(SBC)$  và mặt phẳng đáy.

- (A)  $45^\circ$ .      (B)  $60^\circ$ .      (C)  $30^\circ$ .      (D)  $90^\circ$ .



**Câu 30.18.** Cho hình lập phương  $ABCD.A'B'C'D'$ . Góc giữa hai mặt phẳng  $(A'AC)$  và  $(ABCD)$  bằng

- (A)  $90^\circ$ .      (B)  $60^\circ$ .      (C)  $30^\circ$ .      (D)  $45^\circ$ .

**Câu 30.19.** Cho hình lập phương  $ABCD.A'B'C'D'$ . Góc giữa hai mặt phẳng  $(ADD'A')$  và  $(ABC'D')$  bằng

- A)  $60^\circ$ .                     
  B)  $45^\circ$ .                     
  C)  $90^\circ$ .                     
  D)  $30^\circ$ .

**Câu 30.20.** Cho hình lập phương  $ABCD.A'B'C'D'$ . Tính góc giữa mặt phẳng  $(ABB'A')$  và  $(ABC'D')$ .

- A)  $30^\circ$ .                     
  B)  $90^\circ$ .                     
  C)  $45^\circ$ .                     
  D)  $60^\circ$ .

**D) BẢNG ĐÁP ÁN**

30.1. A	30.2. D	30.3. C	30.4. B	30.5. D	30.6. D	30.7. C	30.8. C
30.9. A	30.10. A	30.11. D	30.12. C	30.13. A	30.14. B	30.15. A	30.16. D
30.17. A	30.18. A	30.19. C	30.20. C				

## DẠNG 31. SỰ TƯƠNG GIAO CỦA HAI ĐỒ THỊ

### A KIẾN THỨC CẦN NHỚ

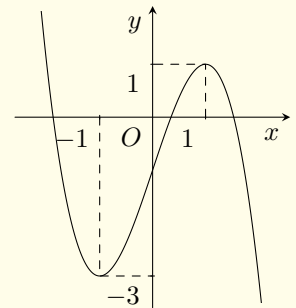
Cho hàm số  $y = f(x)$  có đồ thị  $(C_1)$  và hàm số  $y = g(x)$  có đồ thị  $(C_2)$ .

- Số nghiệm của phương trình  $f(x) = g(x)$  là số điểm chung của hai đồ thị  $(C_1)$  và  $(C_2)$ .
- Phương trình  $f(x) = g(x)$  được gọi là phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị hàm số.

### B BÀI TẬP MẪU

#### CÂU 31 (Đề tham khảo BGD 2022-2023).

Cho hàm số bậc ba  $y = f(x)$  có đồ thị là đường cong trong hình bên. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số  $m$  để phương trình  $f(x) = m$  có ba nghiệm thực phân biệt?



- (A) 2.                      (B) 5.                      (C) 3.                      (D) 4.

### C BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ PHÁT TRIỂN

**Câu 31.1.** Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  có bảng biến thiên như sau

$x$	$-\infty$	$-1$	$0$	$1$	$+\infty$
$y'$	$-$	$0$	$+$	$0$	$+$
$y$	$+\infty$	$\frac{1}{2}$	$5$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$

Số nghiệm thực phân biệt của phương trình  $2f(x) - 5 = 0$  là

- (A) 3.                      (B) 2.                      (C) 4.                      (D) 0.

**Câu 31.2.** Đồ thị hàm số  $y = x^3 + 2022x^2 - 2023x$  cắt trục hoành tại bao nhiêu điểm?

- (A) 0.                      (B) 2.                      (C) 1.                      (D) 3.

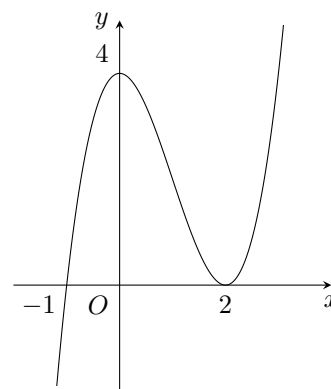
**Câu 31.3.** Số giao điểm của đồ thị hàm số  $y = x^3 - 3x + 3$  và đường thẳng  $y = x$ .

- (A) 2.                      (B) 3.                      (C) 1.                      (D) 0.

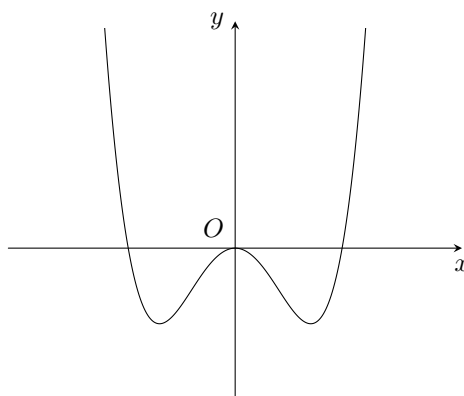
**Câu 31.4.**

Cho hàm số bậc ba  $y = f(x)$  có đồ thị như hình vẽ bên. Số nghiệm của phương trình  $3f(x) - 4 = 0$  là

- (A) 3.                      (B) 1.                      (C) 2.                      (D) 0.



**Câu 31.5.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có đồ thị như hình vẽ.



Số nghiệm thực của phương trình  $f(x) = 3$  là

- (A) 3.                      (B) 1.                      (C) 2.                      (D) 0.

**Câu 31.6.** Đồ thị hàm số  $y = \frac{x+5}{x-1}$  cắt trục hoành tại điểm có hoành độ bằng

- (A)  $x = -5$ .                      (B)  $x = 5$ .                      (C)  $x = -1$ .                      (D)  $x = 1$ .

**Câu 31.7.** Số giao điểm của đồ thị hàm số  $y = \frac{3x+1}{x-3}$  và đường thẳng  $y = 3$  là

- (A) 3.                      (B) 1.                      (C) 2.                      (D) 0.

**Câu 31.8.** Số giao điểm của đồ thị hàm số  $y = x^3 - x$  với trục hoành là

- (A) 2.                      (B) 0.                      (C) 3.                      (D) 1.

**Câu 31.9.** Số giao điểm của đồ thị hàm số  $y = 3x^3 - 6x^2 + 8x - 5$  và trục hoành.

- (A) 1.                      (B) 2.                      (C) 0.                      (D) 3.

**Câu 31.10.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có bảng biến thiên như hình vẽ. Hỏi phương trình  $3f(x) - 4 = 0$  có tất cả bao nhiêu nghiệm thực?

$x$	$-\infty$	$0$	$+\infty$
$y$	$+\infty$	$1$	$+\infty$
		$2$	

- (A) 3.                      (B) 0.                      (C) 1.                      (D) 2.

**Câu 31.11.** Cho hàm số  $f(x)$  có bảng biến thiên như sau

$x$	$-\infty$	$-1$	$0$	$1$	$+\infty$	
$y'$		$-$	$0$	$+$	$0$	$+$
$y$	$+\infty$		$-3$		$+\infty$	

$\swarrow$                        $\nearrow$                        $\searrow$                        $\nearrow$   
 $-4$                        $-4$

Số nghiệm thực của phương trình  $f(x) + 5 = 0$  là

- (A) 2.                      (B) 3.                      (C) 1.                      (D) 0.

**Câu 31.12.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có bảng biến thiên sau

$x$	$-\infty$	$0$	$4$	$+\infty$		
$y'$		$+$	$0$	$-$	$0$	$+$
$y$		$3$		$+\infty$		

$\swarrow$                        $\searrow$                        $\nearrow$   
 $-\infty$                        $-5$

Phương trình  $f(x) = 2$  có bao nhiêu nghiệm?

- (A) 2.                      (B) 4.                      (C) 1.                      (D) 3.

**Câu 31.13.** Đồ thị của hàm số  $y = x^3 + 2x^2 - x + 1$  và đồ thị của hàm số  $y = x^2 - x + 3$  có bao nhiêu điểm chung?

- (A) 2.                      (B) 1.                      (C) 3.                      (D) 0.

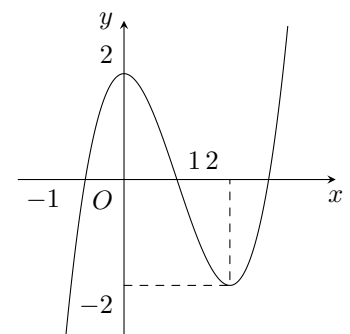
**Câu 31.14.** Số giao điểm của đồ thị hàm số  $y = (x - 3)(x^2 + x + 4)$  với trục hoành là

- (A) 2.                      (B) 0.                      (C) 1.                      (D) 3.

**Câu 31.15.**

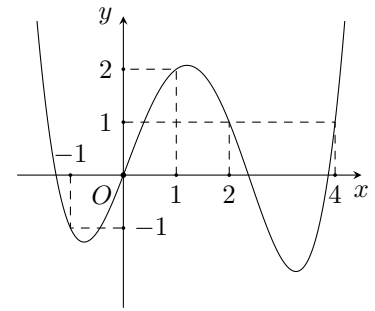
Cho hàm bậc ba  $y = f(x)$  có đồ thị như hình vẽ. Số nghiệm của phương trình  $f(x) = 2$  là

- (A) 2.                      (B) 0.                      (C) 3.                      (D) 1.



**Câu 31.16.**

Cho hàm số bậc bốn  $y = f(x)$  có đồ thị như hình vẽ bên. Số nghiệm của phương trình  $f(x) + 1 = 0$  là



- (A) 2.      (B) 3.      (C) 4.      (D) 1.

**Câu 31.17.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có bảng biến thiên như sau

$x$	$-\infty$	$-2$	$0$	$2$	$+\infty$				
$y'$		$-$	$0$	$+$	$0$	$-$	$0$	$+$	
$y$	$+\infty$		$-2$		$1$		$-2$		$+\infty$

Số nghiệm thực của phương trình  $2f(x) + 3 = 0$  là

- (A) 2.      (B) 4.      (C) 3.      (D) 6.

**Câu 31.18.** Cho hàm số  $y = f(x)$  xác định, liên tục trên  $\mathbb{R}$  và có bảng biến thiên như hình vẽ

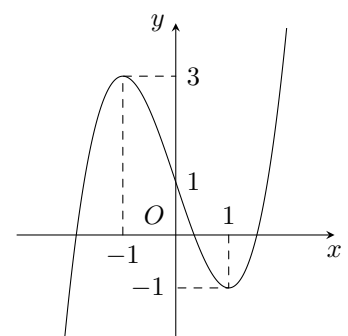
$x$	$-\infty$	$-\sqrt{2}$	$0$	$\sqrt{2}$	$+\infty$				
$y'$		$-$	$0$	$+$	$0$	$-$	$0$	$+$	
$y$	$+\infty$		$-4$		$0$		$-4$		$+\infty$

Tìm  $m$  để phương trình  $f(x) + 3 = m$  vô nghiệm.

- (A)  $m > -1$ .      (B)  $m \geq -4$ .      (C)  $m \leq -4$ .      (D)  $m < -1$ .

**Câu 31.19.**

Cho hàm số  $y = f(x)$  có đồ thị là hình bên. Phương trình  $4 - 3f(x) = 0$  có bao nhiêu nghiệm?



- (A) 1.      (B) 3.      (C) 2.      (D) 0.

**Câu 31.20.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có bảng biến thiên như sau

$x$	$-\infty$	$-1$	$2$	$+\infty$			
$f'(x)$		$-$	$0$	$+$	$0$	$-$	
$f(x)$	$+\infty$		$-2$		$2$		$-\infty$



Số nghiệm của phương trình  $2f(x) - 5 = 0$  là

(A) 2.

(B) 1.

(C) 3.

(D) 0.

**D BẢNG ĐÁP ÁN**

31.1. C	31.2. D	31.3. B	31.4. A	31.5. C	31.6. A	31.7. D	31.8. C
31.9. A	31.10. C	31.11. D	31.12. D	31.13. B	31.14. C	31.15. A	31.16. C
31.17. B	31.18. D	31.19. B	31.20. B				

## DẠNG 32. XÉT TÍNH ĐƠN ĐIỆU CỦA HÀM SỐ

### A KIẾN THỨC CẦN NHỚ

#### 1. Định nghĩa

- Hàm số  $y = f(x)$  được gọi là đồng biến (tăng) trên  $\mathcal{K}$  khi  $f'(x) \geq 0 \forall x \in \mathcal{K}$ .
- Hàm số  $y = f(x)$  được gọi là nghịch biến (giảm) trên  $\mathcal{K}$  khi  $f'(x) \leq 0 \forall x \in \mathcal{K}$ .

#### 2. Các bước thực hiện khi xét tính đơn điệu của hàm số

- **Bước 1.** Tính  $y' = f'(x)$ . Cho  $f'(x) = 0$  tìm nghiệm (nếu có).
- **Bước 2.** Lập bảng biến thiên của hàm số.
- **Bước 3.** Dựa vào bảng biến thiên, kết luận miền đơn điệu của hàm số.

### B BÀI TẬP MẪU

#### CÂU 32 (ĐỀ tham khảo BGD 2022-2023).

Cho hàm số  $f(x)$  có đạo hàm  $f'(x) = (x + 1)^2(x - 1)^3(2 - x)$ . Hàm số  $f(x)$  đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

- A  $(-1; 1)$ .                     
  B  $(2; +\infty)$ .                     
  C  $(1; 2)$ .                     
  D  $(-\infty; -1)$ .

### C BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ PHÁT TRIỂN

**Câu 32.1.** Cho hàm số  $f(x)$  có đạo hàm  $f'(x) = x(x - 1)^3 \forall x \in \mathbb{R}$  nghịch biến trên khoảng nào?

- A  $(-\infty; 0)$ .                     
  B  $(-1; 1)$ .                     
  C  $(0; 1)$ .                     
  D  $(1; +\infty)$ .

**Câu 32.2.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm  $f'(x) = x^2 + 1$ . Khẳng định nào sau đây đúng?

- A Hàm số nghịch biến trên  $(-\infty; +\infty)$ .                     
  B Hàm số nghịch biến trên  $(-1; 1)$ .  
 C Hàm số đồng biến trên  $(-\infty; +\infty)$ .                     
  D Hàm số nghịch biến trên  $(-\infty; 1)$ .

**Câu 32.3.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm liên tục trên  $\mathbb{R}$  và  $y = f'(x) < 0 \forall x \in (-3; 5)$ . Khẳng định nào sau đây đúng?

- A  $f(0) < f(5)$ .                     
  B  $f(-3) > f(5)$ .                     
  C  $f(-3) < f(5)$ .                     
  D  $f(-2) = f(2)$ .

**Câu 32.4.** Hàm số  $f(x)$  có  $f'(x) = (x - 1)(x - 2), \forall x \in \mathbb{R}$  nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

- A  $(2; +\infty)$ .                     
  B  $(-\infty; -1)$ .                     
  C  $(-2; -1)$ .                     
  D  $(1; 2)$ .

**Câu 32.5.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm  $f'(x) = (x^2 - 1)(x + 1)(5 - x)$ . Mệnh đề nào sau đây đúng?

- (A)  $f(2) < f(1) < f(4)$ .                       (B)  $f(4) < f(2) < f(1)$ .  
 (C)  $f(1) < f(4) < f(2)$ .                       (D)  $f(1) < f(2) < f(4)$ .

**Câu 32.6.** Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  và có đạo hàm  $f'(x) = (x + 1)^2(x - 1)^3(2 - x)$ . Hàm số  $y = f(x)$  đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

- (A)  $(2; +\infty)$ .                       (B)  $(-\infty; -1)$ .                       (C)  $(-1; 1)$ .                       (D)  $(1; 2)$ .

**Câu 32.7.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm trên  $\mathbb{R}$  là  $f'(x) = x^2(x - 1)$ . Hàm số  $y = f(x)$  đồng biến trên khoảng nào sau đây?

- (A)  $(-\infty; +\infty)$ .                       (B)  $(1; +\infty)$ .                       (C)  $(-\infty; 1)$ .                       (D)  $(0; 1)$ .

**Câu 32.8.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm  $f'(x) = x(x - 2)^3$ , với mọi  $x \in \mathbb{R}$ . Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

- (A)  $(0; 1)$ .                       (B)  $(-2; 0)$ .                       (C)  $(1; 3)$ .                       (D)  $(-1; 0)$ .

**Câu 32.9.** Hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm  $y' = x^2$ . Mệnh đề nào sau đây đúng?

- (A) Hàm số nghịch biến trên  $(-\infty; 0)$  và đồng biến trên  $(0; +\infty)$ .  
 (B) Hàm số đồng biến trên  $\mathbb{R}$ .  
 (C) Hàm số đồng biến trên  $(-\infty; 0)$  và nghịch biến trên  $(0; +\infty)$ .  
 (D) Hàm số nghịch biến trên  $\mathbb{R}$ .

**Câu 32.10.** Hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm  $f'(x) = x^2 + 1$ . Khẳng định nào sau đây đúng?

- (A) Hàm số nghịch biến trên  $(-\infty; +\infty)$ .                       (B) Hàm số nghịch biến trên  $(-1; 1)$ .  
 (C) Hàm số đồng biến trên  $(-\infty; +\infty)$ .                       (D) Hàm số nghịch biến trên  $(-\infty; 1)$ .

**Câu 32.11.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm  $f'(x) = x^2 + 1, \forall x \in \mathbb{R}$ . Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- (A) Hàm số nghịch biến trên khoảng  $(-1; 1)$ .  
 (B) Hàm số đồng biến trên khoảng  $(-\infty; +\infty)$ .  
 (C) Hàm số nghịch biến trên khoảng  $(-\infty; 0)$ .  
 (D) Hàm số nghịch biến trên khoảng  $(1; +\infty)$ .

**Câu 32.12.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm  $f'(x) = x^2 + 1 \forall x \in \mathbb{R}$ . Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- (A) Hàm số nghịch biến trên khoảng  $(-1; 1)$ .  
 (B) Hàm số đồng biến trên khoảng  $(-\infty; +\infty)$ .  
 (C) Hàm số nghịch biến trên khoảng  $(-\infty; 0)$ .  
 (D) Hàm số nghịch biến trên khoảng  $(1; +\infty)$ .

**Câu 32.13.** Hàm số  $f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  và có đạo hàm  $f'(x) = x^2 + 4$  với mọi  $x \in \mathbb{R}$ . Khẳng định nào sau đây là đúng về sự biến thiên của hàm số  $f(x)$ ?

- (A)  $f(x)$  đồng biến trên  $\mathbb{R}$ .
- (B)  $f(x)$  chỉ đồng biến trên khoảng  $(-2; 2)$  trong tập  $\mathbb{R}$ .
- (C)  $f(x)$  nghịch biến trên  $\mathbb{R}$ .
- (D)  $f(x)$  chỉ nghịch biến trên khoảng  $(-2; 2)$  trong tập  $\mathbb{R}$ .

**Câu 32.14.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có  $f'(x) = (x + 2)(x + 1)(x^2 - 1)$ . Hàm số  $y = f(x)$  đồng biến trên khoảng nào sau đây?

- (A)  $(-2; -1)$ .
- (B)  $(-1; 1)$ .
- (C)  $(0; +\infty)$ .
- (D)  $(-\infty; -2)$ .

**Câu 32.15.** Hàm số  $f(x)$  có đạo hàm  $f'(x) > 0 \forall x \in \mathbb{R}$ . Khi đó hàm số đã cho

- (A) đồng biến trên  $\mathbb{R}$ .
- (B) nghịch biến trên  $\mathbb{R}$ .
- (C) là hàm hằng trên  $\mathbb{R}$ .
- (D) đồng biến trên  $(-\infty; 0)$  và nghịch biến trên  $(0; +\infty)$ .

**Câu 32.16.** Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  và có đạo hàm  $f'(x) = (1 - x)^2(x + 1)^3(3 - x)$ . Hàm số  $y = f(x)$  đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

- (A)  $(-\infty; -1)$ .
- (B)  $(1; 3)$ .
- (C)  $(3; +\infty)$ .
- (D)  $(-\infty; 1)$ .

**Câu 32.17.** Cho hàm số  $f(x)$  có đạo hàm là  $f'(x) = x(x + 1)^2$ . Hàm số đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

- (A)  $(0; +\infty)$ .
- (B)  $(-1; 0)$ .
- (C)  $(-\infty; -1)$ .
- (D)  $(-1; +\infty)$ .

**Câu 32.18.** Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  và có đạo hàm  $f'(x) = (x + 1)^2(x - 1)^3(2 - x)$ . Hàm số  $y = f(x)$  đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

- (A)  $(-1; 1)$ .
- (B)  $(2; +\infty)$ .
- (C)  $(1; 2)$ .
- (D)  $(-\infty; -1)$ .

**Câu 32.19.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm  $f'(x) = (x - 1)^2, \forall x \in \mathbb{R}$ . Mệnh đề nào dưới đây là sai?

- (A) Hàm số đồng biến trên khoảng  $(1; +\infty)$ .
- (B) Hàm số đồng biến trên khoảng  $(-\infty; +\infty)$ .
- (C) Hàm số nghịch biến trên khoảng  $(-\infty; 1)$ .
- (D) Hàm số đồng biến trên khoảng  $(-\infty; 1)$ .

**Câu 32.20.** Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$ , có đạo hàm  $f'(x) = (x - 2)^4 + 1$ . Khẳng định nào sau đây đúng?

- (A) Hàm số  $y = f(x)$  đồng biến trên khoảng  $(2; +\infty)$  và nghịch biến trên khoảng  $(-\infty; 2)$ .
- (B) Hàm số  $y = f(x)$  đồng biến trên khoảng  $(-\infty; +\infty)$ .
- (C) Hàm số  $y = f(x)$  nghịch biến trên khoảng  $(-\infty; +\infty)$ .
- (D) Hàm số  $y = f(x)$  đồng biến trên khoảng  $(-\infty; 2)$  và nghịch biến trên khoảng  $(2; +\infty)$ .

## **D** BẢNG ĐÁP ÁN

32.1. C	32.2. C	32.3. B	32.4. D	32.5. D	32.6. D	32.7. B	32.8. A
32.9. B	32.10. C	32.11. B	32.12. B	32.13. A	32.14. C	32.15. A	32.16. B
32.17. A	32.18. C	32.19. C	32.20. A				

## DẠNG 33. XÁC SUẤT

### A KIẾN THỨC CẦN NHỚ

#### 1. Định nghĩa xác suất

Xác suất của biến cố  $A$  được tính bởi công thức

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)}$$

Trong đó

- $n(A)$  là số kết quả thuận lợi của biến cố  $A$ ;
- $n(\Omega)$  là số kết quả có thể xảy ra của phép thử.

#### 2. Tính chất

- Giả sử  $A$  và  $B$  là các biến cố liên quan đến một phép thử có một số hữu hạn kết quả đồng khả năng xuất hiện. Khi đó, ta có

a)  $P(\emptyset) = 0, P(\Omega) = 1.$

b)  $0 \leq P(A) \leq 1,$  với mọi biến cố  $A.$

c) Nếu  $A$  và  $B$  xung khắc, thì  $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$  (công thức cộng xác suất).

- Các biến cố  $A$  và  $B$  là xung khắc nếu và chỉ nếu chúng không khi nào cùng xảy ra.
- Với mọi biến cố  $A$ , ta có

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A).$$

- Với hai biến cố bất kỳ, ta có mối quan hệ sau (công thức nhân xác suất):

$$A \text{ và } B \text{ là hai biến cố độc lập} \Leftrightarrow P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B).$$

### B BÀI TẬP MẪU

#### CÂU 33 (Đề tham khảo BGD 2022-2023).

Một hộp chứa 15 quả cầu gồm 6 quả màu đỏ được đánh số từ 1 đến 6 và 9 quả màu xanh được đánh số từ 1 đến 9. Lấy ngẫu nhiên hai quả từ hộp đó, xác suất để lấy được hai quả khác màu đồng thời tổng hai số ghi trên chúng là số chẵn bằng

(A)  $\frac{9}{35}$ .

(B)  $\frac{18}{35}$ .

(C)  $\frac{4}{35}$ .

(D)  $\frac{1}{7}$ .

## **C** BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ PHÁT TRIỂN

**Câu 33.1.** Cho một hộp chứa 9 viên bi được đánh số từ 1 đến 9. Chọn ngẫu nhiên 3 viên bi rồi cộng các số trên 3 viên đó với nhau. Xác suất để số thu được là số lẻ bằng

- (A)  $\frac{3}{4}$ .                      (B)  $\frac{11}{21}$ .                      (C)  $\frac{1}{2}$ .                      (D)  $\frac{10}{21}$ .

**Câu 33.2.** Một hộp chứa 6 bi vàng, 5 bi đỏ và 4 bi xanh. Lấy ngẫu nhiên 8 bi trong hộp. Xác suất để trong 8 bi lấy ra có số bi vàng và số bi đỏ khác nhau là

- (A)  $\frac{344}{429}$ .                      (B)  $\frac{526}{1001}$ .                      (C)  $\frac{95}{429}$ .                      (D)  $\frac{334}{429}$ .

**Câu 33.3.** Có 3 chiếc hộp. Mỗi hộp chứa 4 tấm thẻ được đánh số từ 1 đến 4. Lấy ngẫu nhiên từ mỗi hộp một thẻ. Tính xác suất để 3 thẻ được lấy ra đều mang số chẵn.

- (A)  $\frac{2}{3}$ .                      (B)  $\frac{3}{32}$ .                      (C)  $\frac{1}{2}$ .                      (D)  $\frac{1}{8}$ .

**Câu 33.4.** Gọi  $S$  là tập hợp các số tự nhiên có 3 chữ số được lập từ tập  $A = \{0; 1; 2; 3; \dots; 9\}$ . Chọn ngẫu nhiên một số từ tập  $S$ , tính xác suất để chọn được số tự nhiên có tích các chữ số bằng 30.

- (A)  $\frac{1}{75}$ .                      (B)  $\frac{4}{3 \cdot 10^3}$ .                      (C)  $\frac{1}{50}$ .                      (D)  $\frac{1}{108}$ .

**Câu 33.5.** Một hộp chứa 11 viên bi được đánh số từ 1 đến 11. Chọn ngẫu nhiên 6 viên bi từ hộp. Tính xác suất để tổng các số trên các viên bi là một số lẻ?

- (A)  $\frac{103}{231}$ .                      (B)  $\frac{215}{462}$ .                      (C)  $\frac{118}{231}$ .                      (D)  $\frac{115}{231}$ .

**Câu 33.6.** Có 30 tấm thẻ đánh số từ 1 đến 30. Chọn ngẫu nhiên 10 tấm thẻ. Tính xác suất để có 5 tấm thẻ mang số lẻ, 5 tấm thẻ mang số chẵn, trong đó có đúng 1 thẻ mang số chia hết cho 10.

- (A)  $\frac{99}{667}$ .                      (B) 0, 1.                      (C)  $\frac{48}{105}$ .                      (D) 0, 17.

**Câu 33.7.** Chọn ngẫu nhiên một số tự nhiên có 4 chữ số. Tính xác suất để số được chọn không vượt quá 2023, đồng thời nó chia hết cho 5.

- (A)  $\frac{41}{1800}$ .                      (B)  $\frac{99}{750}$ .                      (C)  $\frac{48}{1800}$ .                      (D)  $\frac{17}{105}$ .

**Câu 33.8.** Cho tập hợp  $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ . Gọi  $S$  là tập hợp các số gồm có 3 chữ số khác nhau được lập từ các chữ số của tập  $A$ . Chọn ngẫu nhiên một số từ  $S$ . Tính xác suất để số được chọn có chữ số cuối gấp đôi chữ số đầu.

- (A)  $\frac{1}{5}$ .                      (B)  $\frac{23}{25}$ .                      (C)  $\frac{2}{25}$ .                      (D)  $\frac{4}{5}$ .

**Câu 33.9.** Có 6 học sinh lớp 11 và 3 học sinh lớp 12. Tính xác suất để trong các cách sắp xếp ngẫu nhiên 9 học sinh đó vào một dãy có 9 chiếc ghế sao cho không có hai học sinh lớp 12 nào ngồi cạnh nhau.

- (A)  $\frac{5}{72}$ .                      (B)  $\frac{7}{72}$ .                      (C)  $\frac{5}{12}$ .                      (D)  $\frac{1}{1728}$ .

**Câu 33.10.** Chọn ngẫu nhiên hai số khác nhau từ 27 số nguyên dương đầu tiên. Xác suất để chọn được hai số có tổng là một số chẵn bằng

- (A)  $\frac{13}{27}$ .                      (B)  $\frac{14}{27}$ .                      (C)  $\frac{1}{2}$ .                      (D)  $\frac{365}{729}$ .

**Câu 33.11.** Gọi  $S$  là tập các số tự nhiên có bốn chữ số khác nhau được tạo từ tập  $E = \{1; 2; 3; 4; 5\}$ . Chọn ngẫu nhiên một số từ tập  $S$ . Tính xác suất để số được chọn là một số chẵn?

- (A)  $\frac{3}{4}$ .                      (B)  $\frac{2}{5}$ .                      (C)  $\frac{3}{5}$ .                      (D)  $\frac{1}{2}$ .

**Câu 33.12.** Một hộp đựng 11 viên bi được đánh số từ 1 đến 11. Lấy ngẫu nhiên 4 viên bi, rồi cộng các số trên các bi lại với nhau. Xác suất để kết quả thu được là 1 số lẻ bằng

- (A)  $\frac{31}{32}$ .                      (B)  $\frac{11}{32}$ .                      (C)  $\frac{16}{33}$ .                      (D)  $\frac{21}{32}$ .

**Câu 33.13.** Cho 14 tấm thẻ đánh số từ 1 đến 14. Chọn ngẫu nhiên 3 thẻ. Xác suất để tích 3 số ghi trên 3 tấm thẻ này chia hết cho 3 bằng

- (A)  $\frac{30}{91}$ .                      (B)  $\frac{61}{91}$ .                      (C)  $\frac{31}{91}$ .                      (D)  $\frac{12}{17}$ .

**Câu 33.14.** Gọi  $S$  là tất cả các số tự nhiên gồm hai chữ số khác nhau lập từ các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6. Chọn ngẫu nhiên hai số từ tập  $S$ . Tính xác suất để tích hai số được chọn là số chẵn.

- (A)  $\frac{1}{6}$ .                      (B)  $\frac{2}{5}$ .                      (C)  $\frac{5}{6}$ .                      (D)  $\frac{3}{4}$ .

**Câu 33.15.** Gọi  $A$  là tập hợp các số có ba chữ số khác nhau được lập từ các chữ số 1, 2, 3, 4, 5. Chọn ngẫu nhiên ba số từ tập hợp  $A$ , xác suất để trong ba số được chọn có đúng một số có mặt chữ số 4 bằng

- (A)  $\frac{2484}{8555}$ .                      (B)  $\frac{5}{17}$ .                      (C)  $\frac{2518}{8555}$ .                      (D)  $\frac{4}{17}$ .

**Câu 33.16.** Gọi  $S$  là tập hợp tất cả các số tự nhiên có 3 chữ số được lập từ tập  $X = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7\}$ . Rút ngẫu nhiên một số từ  $S$ . Tính xác suất để rút được số mà trong số đó, chữ số đứng sau luôn lớn hơn hoặc bằng chữ số đứng trước.

- (A)  $\frac{3}{32}$ .                      (B)  $\frac{2}{7}$ .                      (C)  $\frac{3}{16}$ .                      (D)  $\frac{11}{64}$ .

**Câu 33.17.** Một hộp đựng 50 chiếc thẻ được đánh số từ 1 đến 50. Chọn ngẫu nhiên từ một hộp hai thẻ. Tính xác suất để hiệu bình phương số ghi trên hai thẻ lấy được là số chia hết cho 3.

- (A)  $\frac{409}{1225}$ .                      (B)  $\frac{681}{1225}$ .                      (C)  $\frac{8}{25}$ .                      (D)  $\frac{801}{1225}$ .

**Câu 33.18.** Một hộp gồm 30 quả cầu được đánh số từ 1 đến 30. Chọn ngẫu nhiên 3 quả cầu từ hộp đó. Xác suất để lấy được 3 quả cầu có đúng 1 quả cầu ghi số lẻ và tích 3 số ghi trên ba quả cầu là một số chia hết cho 8 bằng

- (A)  $\frac{33}{116}$ .                      (B)  $\frac{21}{58}$ .                      (C)  $\frac{45}{116}$ .                      (D)  $\frac{6}{29}$ .

**Câu 33.19.** Gọi  $S$  là tập hợp các số tự nhiên gồm 4 chữ số đôi một khác nhau được lập nên từ các chữ số 0; 1; 2; 3; 4; 5. Chọn ngẫu nhiên một số từ tập  $S$ . Xác suất để số được chọn có chứa ít nhất một trong hai chữ số 1 hoặc 2 bằng



(A)  $\frac{1}{3}$ .

(B)  $\frac{1}{15}$ .

(C)  $\frac{3}{50}$ .

(D)  $\frac{47}{50}$ .

**Câu 33.20.** Có 6 học sinh nam và 3 học sinh nữ được xếp chỗ ngồi ngẫu nhiên vào một dãy gồm 9 ghế. Xác suất để mỗi học sinh nữ được xếp ngồi xen giữa hai học sinh nam là

(A) 11,9%.

(B) 58,33%.

(C) 60,71%.

(D) 6,94%.

**(D) BẢNG ĐÁP ÁN**

33.1. D	33.2. D	33.3. D	33.4. A	33.5. C	33.6. A	33.7. A	33.8. C
33.9. C	33.10. A	33.11. B	33.12. C	33.13. B	33.14. C	33.15. A	33.16. C
33.17. B	33.18. A	33.19. D	33.20. A				

## DẠNG 34. PHƯƠNG TRÌNH MŨ

### A KIẾN THỨC CẦN NHỚ

Sử dụng kiến thức  $a^x = b \Leftrightarrow x = \log_a b$  với  $a, b > 0, a \neq 1$ .

### B BÀI TẬP MẪU

#### CÂU 34 (ĐỀ minh họa BGD 2022-2023).

Tích tất cả các nghiệm của phương trình  $\ln^2 x + 2 \ln x - 3 = 0$  bằng

- (A)  $\frac{1}{e^3}$ .                      (B)  $-2$ .                      (C)  $-3$ .                      (D)  $\frac{1}{e^2}$ .

### C BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ PHÁT TRIỂN

**Câu 34.1.** Khi đặt  $3^x = t$  thì phương trình  $9^{x+1} - 3^{x+1} - 30 = 0$  trở thành

- (A)  $3t^2 - t - 10 = 0$ .      (B)  $2t^2 - t - 1 = 0$ .      (C)  $9t^2 - 3t - 10 = 0$ .      (D)  $t^2 - t - 10 = 0$ .

**Câu 34.2.** Xét bất phương trình  $5^{2x} - 3 \cdot 5^{x+2} + 32 < 0$ . Nếu đặt  $t = 5^x$  thì bất phương trình trở thành bất phương trình nào sau đây?

- (A)  $t^2 - 16t + 32 < 0$ .      (B)  $t^2 - 6t + 32 < 0$ .      (C)  $t^2 - 75t + 32 < 0$ .      (D)  $t^2 - 3t + 32 < 0$ .

**Câu 34.3.** Phương trình  $4^x - 3 \cdot 2^x + 2 = 0$  có nghiệm thuộc khoảng

- (A)  $(-1; 0)$ .                      (B)  $(3; 6)$ .                      (C)  $(\frac{1}{2}; 2)$ .                      (D)  $(2; 4)$ .

**Câu 34.4.** Phương trình  $4^x - 3 \cdot 2^x + 2 = 0$  có nghiệm thuộc khoảng

- (A)  $(3; 6)$ .                      (B)  $(\frac{1}{2}; 2)$ .                      (C)  $(2; 4)$ .                      (D)  $(-1; 0)$ .

**Câu 34.5.** Xét bất phương trình  $5^{2x} - 3 \cdot 5^{x+2} + 32 < 0$ . Nếu đặt  $t = 5^x$  thì bất phương trình trở thành bất phương trình nào sau đây?

- (A)  $t^2 - 6t + 32 < 0$ .      (B)  $t^2 - 75t + 32 < 0$ .      (C)  $t^2 - 3t + 32 < 0$ .      (D)  $t^2 - 16t + 32 < 0$ .

**Câu 34.6.** Tập nghiệm  $S$  của bất phương trình  $9^{x+\frac{1}{2}} - 10 \cdot 3^x + 3 \leq 0$ .

- (A)  $S = (-\infty; -1] \cup [1; +\infty)$ .                      (B)  $S = \{-1; 1\}$ .  
 (C)  $S = (-1; 1)$ .                      (D)  $S = [-1; 1]$ .

**Câu 34.7.** Tìm tổng các nghiệm của phương trình  $2^{2x+1} - 5 \cdot 2^x + 2 = 0$ .

- (A) 2.                      (B) 0.                      (C)  $\frac{5}{2}$ .                      (D) 1.

**Câu 34.8.** Khi đặt  $3^x = t$  thì phương trình  $9^{x+1} - 3^{x+1} - 30 = 0$  trở thành

- (A)  $t^2 - t - 10 = 0$ .      (B)  $2t^2 - t - 1 = 0$ .      (C)  $3t^2 - t - 10 = 0$ .      (D)  $9t^2 - 3t - 10 = 0$ .

**Câu 34.9.** Bất phương trình  $9^x - 4 \cdot 3^x + 3 \leq 0$  có bao nhiêu nghiệm nguyên?

- (A) 1.                      (B) 2.                      (C) 3.                      (D) 0.

**Câu 34.10.** Tập nghiệm của bất phương trình  $4^x - 6 \cdot 2^x + 8 < 0$  là

- (A)  $(0; 2)$ . (B)  $(-\infty; 1) \cup (2; +\infty)$ .  
 (C)  $(1; 2)$ . (D)  $(2; 4)$ .

**Câu 34.11.** Tổng các nghiệm của phương trình  $3^x - 8 \cdot 3^{\frac{x}{2}} + 15 = 0$  bằng

- (A)  $2(1 + \log_3 5)$ . (B)  $4 \log_5 3$ . (C)  $3 \log_3 5$ . (D)  $2 + \log_3 5$ .

**Câu 34.12.** Phương trình  $2^{\sin^2 x} + 3^{\cos^2 x} = 4 \cdot 3^{\sin^2 x}$  có bao nhiêu nghiệm thuộc  $[-2017; 2017]$ .

- (A) 1285. (B) 4035. (C) 1284. (D) 4034.

**Câu 34.13.** Tập nghiệm của bất phương trình  $4^x - 3 \cdot 2^{x+1} + 5 \leq 0$  là

- (A)  $[-\infty; \log_2 5]$ . (B)  $[-1; \log_2 5]$ . (C)  $[\log_2 5; +\infty)$ . (D)  $[0; \log_2 5]$ .

**Câu 34.14.** Tìm tập nghiệm  $S$  của phương trình  $e^{6x} - 3e^{3x} + 2 = 0$ .

- (A)  $S = \left\{1; \frac{\ln 2}{3}\right\}$ . (B)  $S = \{0; \ln 2\}$ . (C)  $S = \{1; \ln 2\}$ . (D)  $S = \left\{0; \frac{\ln 2}{3}\right\}$ .

**Câu 34.15.** Tập nghiệm của bất phương trình  $\log_3^2 x - 2 \log_3 x^2 + 3 < 0$  là

- (A)  $(-\infty; 3) \cup (27; +\infty)$ . (B)  $(3; 27)$ .  
 (C)  $(0; 3) \cup (27; +\infty)$ . (D)  $[3; 27]$ .

**Câu 34.16.** Tổng tất cả các nghiệm của phương trình  $\log_2 \left(10 \cdot (\sqrt{2019})^x - 2019^x\right) = 4$  bằng

- (A)  $\log_{2019} 10$ . (B)  $2 \log_{2019} 10$ . (C)  $\log_{2019} 16$ . (D)  $2 \log_{2019} 16$ .

**Câu 34.17.** Phương trình  $\log_2^2 x - 8\sqrt{\log_2(8x)} - 12 = 0$  có tất cả bao nhiêu nghiệm?

- (A) 1. (B) 3. (C) 2. (D) 0.

**Câu 34.18.** Cho  $x > 1$  và thỏa mãn  $\log_3(\log_{27} x) = \log_{27}(\log_3 x)$ . Khi đó giá trị  $\log_3 x$  bằng

- (A)  $\frac{1}{3}$ . (B) 3. (C)  $3\sqrt{3}$ . (D) 27.

**Câu 34.19.** Biết phương trình  $\log_2^2 x - 2 \log_2(2x) - 1 = 0$  có hai nghiệm  $x_1; x_2$ . Tính  $x_1 x_2$ .

- (A)  $x_1 x_2 = \frac{1}{2}$ . (B)  $x_1 x_2 = -3$ . (C)  $x_1 x_2 = 4$ . (D)  $x_1 x_2 = \frac{1}{8}$ .

**Câu 34.20.** Tìm tập nghiệm  $S$  của bất phương trình:  $\log_2^2(x-1) - 4 \log_2(x-1) + 3 \geq 0$


- (A)  $S = [3; 9]$ . (B)  $S = (1; 3] \cup [9; +\infty)$ .  
 (C)  $S = (-\infty; 1] \cup [3; +\infty)$ . (D)  $S = (-\infty; 3] \cup [9; +\infty)$ .

### **D BẢNG ĐÁP ÁN**

34.1. A	34.2. C	34.3. C	34.4. B	34.5. B	34.6. D	34.7. B	34.8. C
34.9. B	34.10. C	34.11. A	34.12. A	34.13. D	34.14. D	34.15. B	34.16. D
34.17. A	34.18. C	34.19. C	34.20. B				

## DẠNG 35. PHÉP ĐẾM

### A KIẾN THỨC CẦN NHỚ

 Phương pháp chung của bài toán tìm tập hợp điểm biểu diễn số phức là

- Gọi  $M(x; y)$  là điểm biểu diễn số phức  $z = x + yi$ .
- Thay vào điều kiện đề bài, ta được một phương trình biểu diễn theo hai biến  $x$  và  $y$ .

Chú ý các công thức

▶ $\bar{z} = x - yi.$	▶ $ z  = \sqrt{x^2 + y^2}.$
▶ $z \cdot \bar{z} = x^2 + y^2.$	▶ $z^2 = x^2 - y^2 + 2xyi.$

- Tùy thuộc vào phương trình thu được, ta kết luận tập hợp điểm chạy trên "đối tượng hình" tương ứng.

Một số dạng thường gặp

- ▶ Dạng  $Ax + By + C = 0$  : tập hợp điểm là đường thẳng.
- ▶ Dạng  $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$ : tập hợp điểm là đường tròn có tâm  $I(x_0; y_0)$  và bán kính  $R$ .
- ▶ Dạng  $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \leq R^2$ : tập hợp điểm là hình tròn có tâm  $I(x_0; y_0)$  và bán kính  $R$ .
- ▶ Dạng  $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0, (a^2 + b^2 - c > 0)$  : tập hợp điểm là đường tròn có tâm  $I(a; b)$  và bán kính  $R = \sqrt{a^2 + b^2 - c}$ .
- ▶ Dạng  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ : tập hợp điểm là đường elip.
- ▶ Dạng  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ : tập hợp điểm là đường hyperbol.
- ▶ Dạng  $y = ax^2 + bx + c \quad (a \neq 0)$ : tập hợp điểm là đường parabol.

### B BÀI TẬP MẪU

#### CÂU 35 (Đề minh họa BGD 2022-2023).

Trên mặt phẳng tọa độ, biết tập hợp điểm biểu diễn các số phức  $z$  thỏa mãn  $|z + 2i| = 1$  là một đường tròn. Tâm của đường tròn đó có tọa độ là

- (A) (0; 2).                     
  (B) (-2; 0).                     
  (C) (0; -2).                     
  (D) (2; 0).

## BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ PHÁT TRIỂN

**Câu 35.1.** Cho số phức  $z$  thoả  $|z - 1 + i| = 4$ . Phát biểu nào sau đây là đúng?

- (A) Tập hợp điểm biểu diễn số phức  $z$  là đường tròn có tâm  $I(1; -1)$  và bán kính bằng  $R = 4$ .
- (B) Tập hợp điểm biểu diễn số phức  $z$  là một đường tròn có tâm  $I(-1; 1)$  và bán kính  $R = 2$ .
- (C) Tập hợp điểm biểu diễn số phức  $z$  là một đường parabol.
- (D) Tập hợp điểm biểu diễn số phức  $z$  là một đường thẳng.

**Câu 35.2.** Biết tập hợp điểm biểu diễn số phức  $z$  thoả  $|iz - 1 + 2i| = 4$  là một đường tròn. Tìm toạ độ tâm  $I$  của đường tròn đó.

- (A)  $I(1; 2)$ .
- (B)  $I(-1; -2)$ .
- (C)  $I(-2; -1)$ .
- (D)  $I(2; 1)$ .

**Câu 35.3.** Tập hợp điểm biểu diễn số phức  $z$  thoả  $|z + 4 - 4i| \leq 2$  là

- (A) Hình tròn tâm  $I(4; -4)$  và bán kính  $R = 4$ .
- (B) Hình tròn tâm  $I(-4; 4)$  và bán kính  $R = 2$ .
- (C) Đường tròn tâm  $I(4; -4)$  và bán kính  $R = 4$ .
- (D) Đường tròn tâm  $I(-4; 4)$  và bán kính  $R = 2$ .

**Câu 35.4.** Gọi  $(H)$  là hình gồm tập hợp điểm  $M$  biểu diễn số phức  $z$  thoả  $|z + 3|^2 + |z - 3|^2 = 50$ . Tính diện tích hình  $(H)$ .

- (A)  $S = 8\pi$ .
- (B)  $S = 16\pi$ .
- (C)  $S = 15\pi$ .
- (D)  $S = 20\pi$ .

**Câu 35.5.** Biết tập hợp điểm biểu diễn số phức  $z$  thoả  $|z - 2i| - |2z + 1| = 0$  là một đường tròn. Tính chu vi  $C$  của đường tròn đó.

- (A)  $C = \frac{2\sqrt{17}\pi}{3}$ .
- (B)  $C = \frac{\sqrt{17}\pi}{3}$ .
- (C)  $C = \frac{17\pi}{9}$ .
- (D)  $C = \frac{4\sqrt{17}\pi}{3}$ .

**Câu 35.6.** Tập hợp các điểm biểu diễn số phức  $z$  thoả  $|(1 - i)z - 4 + 2i| = 2$  là một đường tròn. Tìm toạ độ tâm  $I$  và tính bán kính  $R$  của đường tròn đó.

- (A)  $I(-3; -1), R = 2$ .
- (B)  $I(3; 1), R = \sqrt{2}$ .
- (C)  $I(3; 1), R = 2$ .
- (D)  $I(-3; -1), R = \sqrt{2}$ .

**Câu 35.7.** Biết tập hợp điểm biểu diễn số phức  $z$  thoả  $|\bar{z} + 2 - i| = 4$  là một đường tròn có tâm  $I$  và bán kính  $R$ . Khẳng định nào sau đây là đúng?

- (A)  $I(-2; -1), R = 4$ .
- (B)  $I(2; -1), R = 4$ .
- (C)  $I(2; -1), R = 2$ .
- (D)  $I(-2; -1), R = 2$ .

**Câu 35.8.** Cho số phức  $z$  thoả  $(z + 1)(\bar{z} - 2i)$  là một số thuần ảo. Biết tập hợp điểm biểu diễn số phức  $z$  là một đường tròn. Tìm bán kính  $R$  của đường tròn đó.

- (A)  $R = \frac{\sqrt{5}}{2}$ .
- (B)  $R = \frac{\sqrt{5}}{4}$ .
- (C)  $R = \sqrt{5}$ .
- (D)  $R = \frac{5}{4}$ .

**Câu 35.9.** Biết tập hợp điểm biểu diễn số phức  $z$  thoả  $|z - i| = |2 - 3i - z|$  là một đường thẳng. Tính khoảng cách  $d$  từ gốc toạ độ  $O$  đến đường thẳng đó.

- (A)  $d = 3$ .
- (B)  $d = \sqrt{3}$ .
- (C)  $d = \frac{3\sqrt{5}}{5}$ .
- (D)  $d = \frac{5}{5}$ .

**Câu 35.10.** Gọi  $(H)$  là hình gồm tập hợp các điểm biểu diễn số phức  $z$  thoả  $1 \leq |z - 1| \leq 2$ . Tính diện tích hình  $(H)$ .

- (A)  $S_{(H)} = 2\pi$ .      (B)  $S_{(H)} = 5\pi$ .      (C)  $S_{(H)} = 3\pi$ .      (D)  $S_{(H)} = \pi$ .

**Câu 35.11.** Tập hợp điểm biểu diễn số phức  $z$  thoả mãn  $|z + 2| + |z - 2| = 8$  là

- (A) Một đoạn thẳng.      (B) Một đường hyperbol.  
(C) Một đường elip.      (D) Một đường parabol.

**Câu 35.12.** Cho số phức  $z$  thoả  $(z - i)(2 + i)$  là một số thuần ảo. Tập hợp các điểm biểu diễn số phức  $z$  là

- (A) Đường thẳng có phương trình  $2x - y + 1 = 0$ .  
(B) Đường tròn có tâm  $I(1; -1)$  và bán kính  $R = 4$ .  
(C) Đường thẳng có phương trình  $x + 2y - 2 = 0$ .  
(D) Đường tròn có tâm  $I(2; -1)$  và bán kính  $R = 2$ .

**Câu 35.13.** Biết tập hợp các điểm biểu diễn các số phức  $z$  thoả mãn điều kiện  $\left| \frac{z}{z - 1} \right| = 3$  là một đường tròn. Tìm toạ độ tâm  $I$  của đường tròn đó.

- (A)  $I\left(\frac{9}{8}; 0\right)$ .      (B)  $I\left(\frac{9}{4}; 0\right)$ .      (C)  $I\left(-\frac{9}{8}; 0\right)$ .      (D)  $I\left(-\frac{9}{4}; 0\right)$ .

**Câu 35.14.** Cho số phức  $z$  thoả  $|z| = 2$ . Biết tập hợp điểm biểu diễn số phức  $w$  thoả mãn  $w = 3 + i - (3 - 4i)z$  là một đường tròn. Tìm bán kính  $R$  của đường tròn đó.

- (A) 10.      (B)  $2\sqrt{5}$ .      (C)  $5\sqrt{2}$ .      (D)  $5\sqrt{5}$ .

**Câu 35.15.** Cho số phức  $z$  thoả  $|z| = \sqrt{5}$ . Biết tập hợp điểm biểu diễn số phức  $w$  thoả mãn  $w = (1 + 2i)z + i$  là một đường tròn. Tìm bán kính  $r$  của đường tròn đó.

- (A)  $r = 2\sqrt{5}$ .      (B)  $r = \sqrt{5}$ .      (C)  $r = 10$ .      (D)  $r = 5$ .

**Câu 35.16.** Xét các số phức  $z$  thoả mãn  $|z - 2i + 1| = 4$ . Biết rằng tập hợp các điểm biểu diễn số phức  $w = (12 - 5i)z + 3i$  là một đường tròn. Tìm tâm  $I$  của đường tròn đó.

- (A)  $I(-1; 2)$ .      (B)  $I(-2; 32)$ .      (C)  $I(2; -32)$ .      (D)  $I(1; -5)$ .

**Câu 35.17.** Cho số phức  $z$  thoả  $|z| = 3$ . Biết tập hợp điểm biểu diễn số phức  $w = \bar{z} + i$  là một đường tròn. Tìm toạ độ tâm của đường tròn đó.

- (A)  $I(0; 1)$ .      (B)  $I(0; -1)$ .      (C)  $I(1; 0)$ .      (D)  $I(-1; 0)$ .

**Câu 35.18.** Cho hai số phức  $z, w$  thoả  $|z| = 10$  và  $\bar{z} = (3 + 4i)\bar{w}$ . Tập hợp điểm biểu diễn số phức  $w$  là

- (A) Đường tròn tâm  $I(2; 0)$  và bán kính  $R = 2$ .  
(B) Đường tròn tâm  $O(0; 0)$  và bán kính  $R = 2$ .  
(C) Đường tròn tâm  $I(0; 2)$  và bán kính  $R = 2$ .  
(D) Đường tròn tâm  $O(0; 0)$  và bán kính  $R = 1$ .

**Câu 35.19.** Xét các số phức  $z$  thỏa mãn  $|z - 1| = |\bar{z} - i|$ . Quỹ tích các điểm biểu diễn của số phức  $w = (3 - 4i)z + i$  là

- (A) Một đường thẳng. (B) Một đường tròn.  
 (C) Một đường parabol. (D) Một đường elip.

**Câu 35.20.** Xét số phức  $z$  thỏa mãn  $|z| = \sqrt{2}$ . Trên mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , tập hợp điểm biểu diễn các số phức  $w = \frac{4 + iz}{1 + z}$  là một đường tròn có bán kính bằng

- (A)  $\sqrt{34}$ . (B) 26. (C) 34. (D)  $\sqrt{26}$ .

**D BẢNG ĐÁP ÁN**

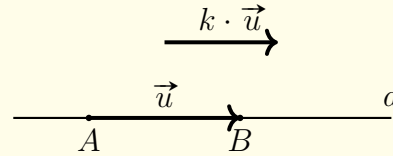
35.1. A	35.2. C	35.3. B	35.4. B	35.5. A	35.6. B	35.7. A	35.8. A
35.9. C	35.10. C	35.11. C	35.12. A	35.13. A	35.14. A	35.15. D	35.16. B
35.17. A	35.18. B	35.19. A	35.20. A				

## DẠNG 36. VIẾT PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG THẲNG

### A KIẾN THỨC CẦN NHỚ

#### 1. Véc-tơ chỉ phương của đường thẳng

- Cho đường thẳng  $\Delta$ , véc-tơ  $\vec{u} \neq \vec{0}$  gọi là véc-tơ chỉ phương của đường thẳng  $\Delta$  nếu giá của nó song song hoặc trùng với  $\Delta$ .



- Cho đường thẳng  $\Delta$  đi qua  $M(x_0; y_0; z_0)$  và có véc-tơ chỉ phương là  $\vec{u} = (a; b; c)$ .
- Nếu  $\vec{u}$  là véc-tơ chỉ phương của  $\Delta$  thì  $k \cdot \vec{u}$  ( $k \neq 0$ ) cũng là véc-tơ chỉ phương của  $\Delta$ .
- Nếu đường thẳng  $\Delta$  đi qua hai điểm  $A, B$  thì  $\overrightarrow{AB}$  là một véc-tơ chỉ phương.

#### 2. Viết phương trình đường thẳng

- Biết đường thẳng  $d$  đi qua điểm  $M_0(a_1; a_2; a_3)$  và có véc-tơ chỉ phương  $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$ ,

$$(\vec{a} \neq \vec{0}), \text{ khi đó phương trình tham số của } d \text{ là } \begin{cases} x = x_0 + a_1 t \\ y = y_0 + a_2 t, (t \in \mathbb{R}) \\ z = z_0 + a_3 t \end{cases}$$

- Nếu  $a_1, a_2, a_3$  đều khác không. Phương trình đường thẳng  $d$  viết dưới dạng chính tắc như sau

$$\frac{x - x_0}{a_1} = \frac{y - y_0}{a_2} = \frac{z - z_0}{a_3}$$

### B BÀI TẬP MẪU

#### CÂU 36 (Đề minh họa BGD 2022-2023).

Trong không gian  $Oxyz$ , cho hai điểm  $M(1; -1; -1)$  và  $N(5; 5; 1)$ . Đường thẳng  $MN$  có phương trình là

$$\textcircled{A} \begin{cases} x = 5 + 2t \\ y = 5 + 3t \\ z = -1 + t \end{cases} \quad \textcircled{B} \begin{cases} x = 5 + t \\ y = 5 + 2t \\ z = 1 + 3t \end{cases} \quad \textcircled{C} \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 + 3t \\ z = -1 + t \end{cases} \quad \textcircled{D} \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 + t \\ z = -1 + 3t \end{cases}$$

### C BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ PHÁT TRIỂN

**Câu 36.1.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho đường thẳng  $\Delta$  đi qua điểm  $M(2; 0; -1)$  và có một véc-tơ chỉ phương  $\vec{a} = (4; -6; 2)$ . Phương trình tham số của  $\Delta$  là



$$\textcircled{A} \begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = -3t \\ z = -1 + t \end{cases} \quad \textcircled{B} \begin{cases} x = 4 + 2t \\ y = -6 \\ z = 2 + t \end{cases} \quad \textcircled{C} \begin{cases} x = -2 + 2t \\ y = 3t \\ z = 1 + t \end{cases} \quad \textcircled{D} \begin{cases} x = -2 + 4t \\ y = 6t \\ z = 1 + 2t \end{cases}$$

**Câu 36.2.** Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , cho hai điểm  $A(1; 1; 2)$ ,  $B(2; -1; 3)$ . Viết phương trình đường thẳng  $AB$ .

$$\textcircled{A} \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z-2}{1} \quad \textcircled{B} \frac{x+2}{1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z+3}{1}$$

$$\textcircled{C} \frac{x+1}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z+2}{1} \quad \textcircled{D} \frac{x+2}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+3}{1}$$

**Câu 36.3.** Trong không gian  $Oxyz$ , phương trình đường thẳng đi qua 2 điểm  $M(2; -1; 1)$  và  $N(0; 1; 3)$  là

$$\textcircled{A} \begin{cases} x = 2 \\ y = -1 + t \\ z = 1 + 3t \end{cases} \quad \textcircled{B} \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 - t \\ z = -1 - t \end{cases} \quad \textcircled{C} \begin{cases} x = 2 + t \\ y = -1 \\ z = 1 + 2t \end{cases} \quad \textcircled{D} \begin{cases} x = 2 + t \\ y = -1 - t \\ z = 1 - t \end{cases}$$

**Câu 36.4.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho điểm  $M(3; -2; 2)$  và mặt phẳng  $(P) : x + 3y - 2z = 0$ . Đường thẳng  $\Delta$  đi qua  $M$  và vuông góc với  $(P)$  có phương trình tham số là

$$\textcircled{A} \begin{cases} x = 3 + t \\ y = -2 + 3t \\ z = -2 - 2t \end{cases} \quad \textcircled{B} \begin{cases} x = 3 + t \\ y = -2 + 3t \\ z = 2 - 2t \end{cases} \quad \textcircled{C} \begin{cases} x = 3 - t \\ y = -2 - 3t \\ z = 2 - 2t \end{cases} \quad \textcircled{D} \begin{cases} x = 3 - t \\ y = -2 - 3t \\ z = -2 + 2t \end{cases}$$

**Câu 36.5.** Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , cho hai điểm  $A(1; 2; -3)$ ,  $B(-2; 3; 1)$  đường thẳng đi qua  $A(1; 2; -3)$  và song song với  $OB$  có phương trình là

$$\textcircled{A} \begin{cases} x = -2 + t \\ y = 3 + 2t \\ z = 1 - 3t \end{cases} \quad \textcircled{B} \begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 2 + 3t \\ z = -3 + t \end{cases} \quad \textcircled{C} \begin{cases} x = 1 - 4t \\ y = 2 - 6t \\ z = -3 + 2t \end{cases} \quad \textcircled{D} \begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 2 + 3t \\ z = -3 - t \end{cases}$$

**Câu 36.6.** Trong không gian  $Oxyz$ , phương trình tham số của đường thẳng  $d$  đi qua điểm  $M(1; 2; 3)$  và có véc-tơ chỉ phương  $\vec{a} = (1; -4; -5)$  là

$$\textcircled{A} \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -4 + 2t \\ z = -5 + 3t \end{cases} \quad \textcircled{B} \frac{x-1}{1} = \frac{y+4}{2} = \frac{z+5}{3}$$

$$\textcircled{C} \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2 + 4t \\ z = 3 + 5t \end{cases} \quad \textcircled{D} \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{-4} = \frac{z-3}{-5}$$

**Câu 36.7.** Cho đường thẳng  $d$  có phương trình tham số  $\begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = 1 - 4t, (t \in \mathbb{R}) \\ z = 5 + 7t \end{cases}$ . Tìm phương trình

chính tắc của đường thẳng  $d$ .

(A)  $d: 2(x - 3) - 4(y - 1) + 7(z - 5) = 0.$

(B)  $d: \frac{x - 2}{3} = \frac{y + 4}{1} = \frac{z - 7}{5}.$

(C)  $d: 3(x - 2) + y + 4 + 5(z - 7) = 0.$

(D)  $d: \frac{x - 3}{2} = \frac{y - 1}{-4} = \frac{z - 5}{7}.$

**Câu 36.8.** Trong không gian  $Oxyz$ , đường thẳng chứa trục  $Oy$  có phương trình tham số là

(A)  $\begin{cases} x = 0 \\ y = 1. \\ z = t \end{cases}$

(B)  $\begin{cases} x = 0 \\ y = t. \\ z = 0 \end{cases}$

(C)  $\begin{cases} x = t \\ y = 0. \\ z = 0 \end{cases}$

(D)  $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0. \\ z = t \end{cases}$

**Câu 36.9.** Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , cho đường thẳng  $d: \begin{cases} x = 2 - t \\ y = 1 + t. \\ z = t \end{cases}$ . Phương trình

nào sau đây là phương trình chính tắc của  $d$ ?

(A)  $\frac{x + 2}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z - 3}{1}.$

(B)  $x - 2 = y = z + 3.$

(C)  $\frac{x - 2}{-1} = \frac{y - 1}{1} = \frac{z}{1}.$

(D)  $\frac{x - 2}{-1} = \frac{y}{1} = \frac{z + 3}{-1}.$

**Câu 36.10.** Trong không gian  $Oxyz$ , viết phương trình chính tắc đường thẳng  $d$  đi qua điểm  $A(1; 2; 3)$  và vuông góc với mặt phẳng  $(P): 2x + 2y + z + 2023 = 0.$

(A)  $\frac{x + 1}{2} = \frac{y + 2}{2} = \frac{z + 3}{3}.$

(B)  $\frac{x - 1}{2} = \frac{y - 2}{2} = \frac{z - 3}{3}.$

(C)  $\frac{x - 2}{1} = \frac{y - 2}{2} = \frac{z - 1}{3}.$

(D)  $\frac{x + 2}{1} = \frac{y + 2}{2} = \frac{z + 1}{3}.$

**Câu 36.11.** Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , cho đường thẳng  $\Delta$  có phương trình chính tắc là  $\frac{x + 2}{1} = \frac{y - 1}{-1} = \frac{z}{2}$ . Hỏi phương trình nào sau đây là phương trình tham số của  $\Delta$ ?

(A)  $\begin{cases} x = -2 + t \\ y = 1 - t. \\ z = t \end{cases}$

(B)  $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = -1 - t. \\ z = 2t \end{cases}$

(C)  $\begin{cases} x = -2 + t \\ y = 1 - t. \\ z = 2t \end{cases}$

(D)  $\begin{cases} x = -2 - t \\ y = 1 - t. \\ z = -2t \end{cases}$

**Câu 36.12.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho điểm  $M(1; 0; -1)$  và đường thẳng  $d: \frac{x - 2}{4} = \frac{y - 1}{-5} = \frac{z - 3}{2}$ . Đường thẳng  $\Delta$  đi qua  $M$  và song song với  $d$  có phương trình tham số là

(A)  $\begin{cases} x = 1 - 4t \\ y = 5t. \\ z = -1 + 2t \end{cases}$

(B)  $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = t. \\ z = -1 + 3t \end{cases}$

(C)  $\begin{cases} x = 1 + 4t \\ y = -5t. \\ z = -1 + 2t \end{cases}$

(D)  $\begin{cases} x = -1 - 4t \\ y = 5t. \\ z = -1 - 2t \end{cases}$

**Câu 36.13.** Trong không gian  $Oxyz$ , phương trình chính tắc của đường thẳng  $(d): \begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 3t \\ z = 2 + t \end{cases}$

là

(A)  $\frac{x + 1}{-2} = \frac{y}{3} = \frac{z + 2}{1}.$

(B)  $\frac{x - 1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z + 2}{2}.$

(C)  $\frac{x+1}{1} = \frac{y}{3} = \frac{z-2}{2}$ .

(D)  $\frac{x-1}{-2} = \frac{y}{3} = \frac{z-2}{1}$ .

**Câu 36.14.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho hai điểm  $M(2; 1; 2)$  và  $N(4; 3; -2)$ . Đường thẳng  $MN$  có phương trình tham số là

(A)  $\begin{cases} x = 4 + 2t \\ y = 3 + 2t \\ z = 2 - 4t \end{cases}$ .

(B)  $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 + t \\ z = 2 + 2t \end{cases}$ .

(C)  $\begin{cases} x = -1 + t \\ y = -2 + t \\ z = 11 - 2t \end{cases}$ .

(D)  $\begin{cases} x = -3 - t \\ y = -4 - t \\ z = 12 + 2t \end{cases}$ .

**Câu 36.15.** Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , cho đường thẳng  $\Delta$  đi qua điểm  $M(2; 0; -1)$  và có véc-tơ chỉ phương  $\vec{a} = (4; -6; 2)$ . Phương trình tham số của  $\Delta$  là

(A)  $\begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = -3t \\ z = -1 + t \end{cases}$ .

(B)  $\begin{cases} x = -2 + 2t \\ y = -3t \\ z = 1 + t \end{cases}$ .

(C)  $\begin{cases} x = 4 + 2t \\ y = -6 - 3t \\ z = 2 + t \end{cases}$ .

(D)  $\begin{cases} x = -2 + 4t \\ y = -6t \\ z = 1 + 2t \end{cases}$ .

**Câu 36.16.** Trong không gian với hệ trục tọa độ  $Oxyz$ , cho mặt phẳng  $(P): 3x - y + 6z - 18 = 0$ .

Đường thẳng  $d$  đi qua  $A(2; 1; 0)$  và vuông góc với mặt phẳng  $(P)$  có dạng là

(A)  $d: \frac{x-2}{-3} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-3}{-6}$ .

(B)  $d: \frac{x-2}{3} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z}{6}$ .

(C)  $d: \frac{x-3}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-2}{3}$ .

(D)  $d: \frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{5}$ .

**Câu 36.17.** Trong không gian  $Oxyz$ , đường thẳng đi qua điểm  $A(1; 4; -7)$  và vuông góc với mặt phẳng  $x + 2y - 2z - 3 = 0$  có phương trình là

(A)  $\frac{x-1}{1} = \frac{y-4}{-2} = \frac{z+7}{-2}$ .

(B)  $\frac{x-1}{1} = \frac{y-4}{2} = \frac{z+7}{-2}$ .

(C)  $\frac{x-1}{1} = \frac{y-4}{2} = \frac{z-7}{-2}$ .

(D)  $\frac{x+1}{1} = \frac{y+4}{4} = \frac{z-7}{-7}$ .

**Câu 36.18.** Trong không gian  $Oxyz$ , đường thẳng đi qua điểm  $M(1; 1; 2)$  và vuông góc với mặt phẳng  $(P): x - 2y + 3z + 4 = 0$  có phương trình là

(A)  $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = -2 + t \\ z = 3 + 2t \end{cases}$ .

(B)  $\begin{cases} x = 1 - t \\ y = 1 - 2t \\ z = 2 + 3t \end{cases}$ .

(C)  $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 - 2t \\ z = 2 + 3t \end{cases}$ .

(D)  $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 - 2t \\ z = 2 - 3t \end{cases}$ .

**Câu 36.19.** Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , cho  $M(-1; 2; 0)$  và mặt phẳng  $(\alpha): 2x - 3z - 5 = 0$ . Viết phương trình đường thẳng qua  $M$  và vuông góc với mặt phẳng  $(\alpha)$ ?

(A)  $\begin{cases} x = 2 - t \\ y = -3 + 2t \\ z = -5 \end{cases}$ .

(B)  $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -2 \\ z = -3t \end{cases}$ .

(C)  $\begin{cases} x = -1 - 2t \\ y = 2 \\ z = 3t \end{cases}$ .

(D)  $\begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 2 - 3t \\ z = -5t \end{cases}$ .

**Câu 36.20.** Trong không gian  $Oxyz$ , đường thẳng đi qua điểm  $A(-2; 4; 3)$  và vuông góc với mặt phẳng  $2x - 3y + 6z + 19 = 0$  có phương trình là

(A)  $\frac{x+2}{2} = \frac{y-4}{-3} = \frac{z-3}{6}$ .

(B)  $\frac{x+2}{2} = \frac{y+3}{4} = \frac{z-6}{3}$ .

(C)  $\frac{x-2}{2} = \frac{y+4}{-3} = \frac{z+3}{6}$ .

(D)  $\frac{x+2}{2} = \frac{y-3}{4} = \frac{z+6}{3}$ .

## **D** BẢNG ĐÁP ÁN

36.1. A	36.2. A	36.3. D	36.4. B	36.5. B	36.6. C	36.7. D	36.8. B
36.9. C	36.10. B	36.11. C	36.12. C	36.13. D	36.14. D	36.15. A	36.16. B
36.17. B	36.18. C	36.19. C	36.20. A				

## DẠNG 37. ĐIỂM ĐỐI XỨNG, HÌNH CHIẾU CỦA 1 ĐIỂM

### A KIẾN THỨC CẦN NHỚ

#### 1. Nhóm bài toán liên quan đến hình chiếu, điểm đối xứng của điểm lên trục, lên mặt phẳng tọa độ

a) **Hình chiếu**: “Thiếu cái nào, cho cái đó bằng 0”. Nghĩa là hình chiếu của  $M(a; b; c)$  lên:

- $Ox$  là  $M_1(a; 0; 0)$ .                      •  $Oy$  là  $M_2(0; b; 0)$ .                      •  $Oz$  là  $M_3(0; 0; c)$ .
- $(Oxy)$  là  $M_4(a; b; 0)$ .                      •  $(Oxz)$  là  $M_5(a; 0; c)$ .                      •  $(Oyz)$  là  $M_6(0; b; c)$ .

b) **Đối xứng**: “Thiếu cái nào, đổi dấu cái đó”. Nghĩa là điểm đối xứng của  $N(a; b; c)$  qua:

- $Ox$  là  $N_1(a; -b; -c)$ .                      •  $Oy$  là  $N_2(-a; b; -c)$ .                      •  $Oz$  là  $N_3(-a; -b; c)$ .
- $(Oxy)$  là  $N_4(a; b; -c)$ .                      •  $(Oxz)$  là  $N_5(a; -b; c)$ .                      •  $(Oyz)$  là  $N_6(-a; b; c)$ .

c) **Khoảng cách**: Để tìm khoảng cách từ điểm  $M$  đến trục (hoặc mặt phẳng tọa độ), ta tìm hình chiếu  $H$  của điểm  $M$  lên trục (hoặc mặt phẳng tọa độ), từ đó suy ra **khoảng cách cần tìm là  $d = MH$** .

#### 2. Điểm thuộc, không thuộc mặt phẳng

a) Phương trình tổng quát của mặt phẳng:  $(\alpha) : Ax + By + Cz + D = 0$   
(với  $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$ ;  $(\alpha)$  có VTPT là  $\vec{n} = (A; B; C)$ )

b) Điểm  $M(x_0; y_0; z_0) \in (P) : Ax + By + Cz + D = 0 \Leftrightarrow Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$ .

c) Điểm  $M(x_0; y_0; z_0) \notin (P) : Ax + By + Cz + D = 0 \Leftrightarrow Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D \neq 0$ .

### B BÀI TẬP MẪU

#### CÂU 37 (Đề minh họa BGD năm 2022 - 2023).

Trong không gian  $Oxyz$ , cho điểm  $A(1; 2; 3)$ . Điểm đối xứng với  $A$  qua mặt phẳng  $(Oxz)$  có tọa độ là

- A  $(1; -2; 3)$ .                     
  B  $(1; 2; -3)$ .                     
  C  $(-1; -2; -3)$ .                     
  D  $(-1; 2; 3)$ .

## **BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ PHÁT TRIỂN**

**Câu 37.1.** Cho điểm  $A(3; -1; 1)$ . Hình chiếu vuông góc của  $A$  trên  $(Oyz)$  là điểm

- (A)  $M(3; 0; 0)$ .      (B)  $N(0; -1; 1)$ .      (C)  $P(0; -1; 0)$ .      (D)  $Q(0; 0; 1)$ .

**Câu 37.2.** Trong không gian  $Oxyz$ , tìm tọa độ điểm  $H$  là hình chiếu của  $M(1; 2; -4)$  lên  $(Oxy)$ .

- (A)  $H(1; 2; -4)$ .      (B)  $H(0; 2; -4)$ .      (C)  $H(1; 0; -4)$ .      (D)  $H(1; 2; 0)$ .

**Câu 37.3.** Hình chiếu vuông góc của  $A(3; -1; 1)$  trên  $(Oxz)$  là  $A'(x; y; z)$ . Khi đó  $x - y - z$  bằng

- (A)  $-4$ .      (B)  $2$ .      (C)  $4$ .      (D)  $3$ .

**Câu 37.4.** Trong không gian với hệ trục tọa độ  $Oxyz$ , tìm tọa độ điểm  $H$  là hình chiếu của  $M(4; 5; 6)$  lên trục  $Ox$ .

- (A)  $H(0; 5; 6)$ .      (B)  $H(4; 0; 0)$ .      (C)  $H(0; 0; 6)$ .      (D)  $H(4; 5; 0)$ .

**Câu 37.5.** Trong không gian với hệ trục tọa độ  $Oxyz$ , tìm tọa độ điểm  $H$  là hình chiếu của  $M(1; -1; 2)$  lên trục  $Oy$ .

- (A)  $H(0; -1; 0)$ .      (B)  $H(1; 0; 0)$ .      (C)  $H(0; 0; 2)$ .      (D)  $H(0; 1; 0)$ .

**Câu 37.6.** Tìm tọa độ  $M'$  là điểm đối xứng của điểm  $M(1; 2; 3)$  qua gốc tọa độ  $O$ .

- (A)  $M'(-1; 2; 3)$ .      (B)  $M'(-1; -2; 3)$ .      (C)  $M'(-1; -2; -3)$ .      (D)  $M'(1; 2; -3)$ .

**Câu 37.7.** Tìm  $M'$  là điểm đối xứng của  $M(1; -2; 0)$  qua điểm  $A(2; 1; -1)$ .

- (A)  $M'(1; 3; -1)$ .      (B)  $M'(3; -3; 1)$ .      (C)  $M'(0; -5; 1)$ .      (D)  $M'(3; 4; -2)$ .

**Câu 37.8.** Tìm tọa độ  $M'$  là điểm đối xứng của điểm  $M(3; 2; 1)$  qua trục  $Ox$ .

- (A)  $M'(3; -2; -1)$ .      (B)  $M'(-3; 2; 1)$ .      (C)  $M'(-3; -2; -1)$ .      (D)  $M'(3; -2; 1)$ .

**Câu 37.9.** Trong không gian  $Oxyz$ , điểm  $N$  đối xứng với điểm  $M(3; -1; 2)$  qua trục  $Oy$  là

- (A)  $N(-3; 1; -2)$ .      (B)  $N(3; 1; -2)$ .      (C)  $N(-3; -1; -2)$ .      (D)  $N(3; -1; -2)$ .

**Câu 37.10.** Tìm tọa độ  $M'$  là điểm đối xứng của điểm  $M(2; 3; 4)$  qua trục  $Oz$ .

- (A)  $M'(2; -3; -4)$ .      (B)  $M'(-2; 3; 4)$ .      (C)  $M'(-2; -3; 4)$ .      (D)  $M'(2; -3; 4)$ .

**Câu 37.11.** Tìm tọa độ  $M'$  là điểm đối xứng của điểm  $M(1; 2; 5)$  qua  $(Oxy)$ .

- (A)  $M'(-1; -2; 5)$ .      (B)  $M'(1; 2; 0)$ .      (C)  $M'(1; -2; 5)$ .      (D)  $M'(1; 2; -5)$ .

**Câu 37.12.** Trong không gian  $Oxyz$ , điểm đối xứng với điểm  $A(-2; 7; 5)$  qua mặt phẳng  $(Oxz)$  là điểm  $B$  có tọa độ là

- (A)  $B(2; 7; -5)$ .      (B)  $B(-2; -7; 5)$ .      (C)  $B(-2; 7; -5)$ .      (D)  $B(2; -7; -5)$ .

**Câu 37.13.** Tìm tọa độ  $M'$  là điểm đối xứng của điểm  $M(1; -2; 3)$  qua  $(Oyz)$ .

- (A)  $M'(-1; -2; 3)$ .      (B)  $M'(1; 2; -3)$ .      (C)  $M'(-1; 2; -3)$ .      (D)  $M'(0; -2; 3)$ .

**Câu 37.14.** Tính khoảng cách  $d$  từ điểm  $M(1; -2; -3)$  đến  $(Oxz)$ .

- (A)  $d = 1$ .                      (B)  $d = 2$ .                      (C)  $d = 3$ .                      (D)  $d = 4$ .

**Câu 37.15.** Trong không gian  $Oxyz$ , hãy tính khoảng cách từ điểm  $M(-3; 2; 4)$  đến trục  $Oy$ .

- (A)  $d = 2$ .                      (B)  $d = 3$ .                      (C)  $d = 4$ .                      (D)  $d = 5$ .

**Câu 37.16.** Cho mặt phẳng  $(P): x - 2y + z = 5$ . Điểm nào dưới đây thuộc  $(P)$ ?

- (A)  $Q(2; -1; 5)$ .              (B)  $P(0; 0; -5)$ .              (C)  $N(-5; 0; 0)$ .              (D)  $M(1; 1; 6)$ .

**Câu 37.17.** Tìm  $m$  để điểm  $M(m; 1; 6)$  thuộc mặt phẳng  $(P): x - 2y + z - 5 = 0$ .

- (A)  $m = 1$ .                      (B)  $m = -1$ .                      (C)  $m = 3$ .                      (D)  $m = 2$ .

**Câu 37.18.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho mặt phẳng  $(\alpha): x + y + z - 6 = 0$ . Điểm nào dưới đây không thuộc  $(\alpha)$ ?

- (A)  $N(2; 2; 2)$ .                      (B)  $Q(3; 3; 0)$ .                      (C)  $P(1; 2; 3)$ .                      (D)  $M(1; -1; 1)$ .

**Câu 37.19.** Trong không gian  $Oxyz$ , mặt phẳng nào dưới đây đi qua điểm  $M(1; -2; 1)$ ?

- (A)  $(P_1): x + y + z = 0$ .                      (B)  $(P_2): x + y + z - 1 = 0$ .  
 (C)  $(P_3): x - 2y + z = 0$ .                      (D)  $(P_4): x + 2y + z - 1 = 0$ .

**Câu 37.20.** Trong không gian  $Oxyz$ , điểm nào dưới đây thuộc mặt phẳng  $(Oxy)$ ?

- (A)  $Q(3; -1; 3)$ .                      (B)  $N(3; -1; 2)$ .                      (C)  $M(2; 2; 0)$ .                      (D)  $P(0; 0; -2)$ .

**(D) BẢNG ĐÁP ÁN**

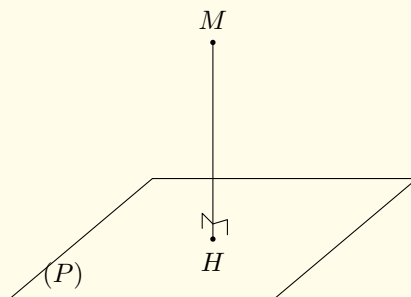
37.1. B	37.2. D	37.3. B	37.4. B	37.5. A	37.6. C	37.7. D	37.8. A
37.9. C	37.10.C	37.11.C	37.12.B	37.13.A	37.14.B	37.15.D	37.16.D
37.17.A	37.18.D	37.19.A	37.20.C				

# DẠNG 38. KHOẢNG CÁCH TỪ MỘT ĐIỂM TỚI MẶT PHẪNG

## A KIẾN THỨC CẦN NHỚ

### 1. Phương pháp chung

Khoảng cách từ điểm  $M$  đến mặt phẳng  $(P)$  là  $MH$ , với  $H$  là hình chiếu vuông góc của  $M$  trên mặt phẳng  $(P)$ .

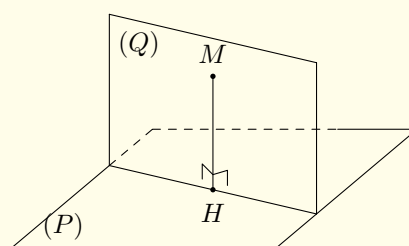


Phương pháp giải chung: Muốn tìm khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng, trước hết ta phải tìm hình chiếu vuông góc của điểm đó trên mặt phẳng. Việc xác định hình chiếu của điểm trên mặt phẳng ta thường dùng một trong các cách sau:

- Cách 1:

- + Bước 1: Tìm một mặt phẳng  $(Q)$  chứa  $M$  và vuông góc với  $(P)$ .
- + Bước 2: Xác định giao tuyến:  $\Delta = (P) \cap (Q)$ .
- + Bước 3: Trong  $(Q)$ , dựng  $MH \perp \Delta, (H \in \Delta)$ .

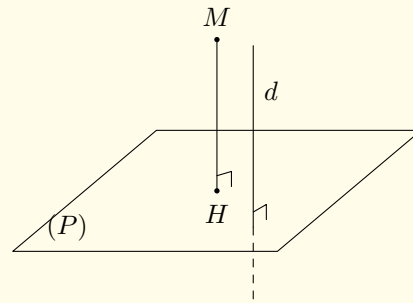
$$\text{Vì } \begin{cases} (P) \perp (Q) \\ \Delta = (P) \cap (Q) \Rightarrow MH \perp (P) \Rightarrow d(M, (P)) = MH \\ (Q) \supset MH \perp \Delta \end{cases}$$



- Cách 2 Nếu đã biết trước một đường thẳng  $d \perp (P)$  thì ta sẽ dựng  $Mx // d$ , khi đó:  $H = Mx \cap (P)$  là hình chiếu vuông góc của  $M$  trên  $(P)$ .

$$\Rightarrow d(M, (P)) = MH$$





• **Cách 3**

Dựa vào tính chất trục của tam giác: Cho  $\triangle ABC$  nằm trên  $(P)$ , nếu  $MA = MB = MC$  thì hình chiếu vuông góc của điểm  $M$  trên  $(P)$  chính là tâm  $O$  của đường tròn ngoại tiếp  $\triangle ABC$ . Khi đó:  $MO \perp (P) \Rightarrow d(M, (P)) = MO$ .

**2. Khoảng cách dựng trực tiếp**

• **Khoảng cách từ chân đường cao tới mặt bên**

Bài toán: Cho hình chóp có đỉnh  $S$  có hình chiếu vuông góc lên mặt đáy là  $H$ . Tính khoảng cách từ điểm  $H$  đến mặt bên  $(SAB)$ .

+ Kẻ  $HI \perp AB, (I \in AB)$ .

+ Kẻ  $HK \perp SI, (K \in SI)$

Khi đó:

$$d(H, (SAB)) = HK = \frac{SH \cdot HI}{\sqrt{SH^2 + HI^2}}$$

• **Khoảng cách từ một điểm trên mặt đáy tới mặt đứng(chứa đường cao)**

Bài toán: Cho hình chóp có đỉnh  $S$  có hình chiếu vuông góc lên mặt đáy là  $H$ . Tính khoảng cách từ điểm  $A$  bất kì đến mặt bên  $(SHB)$ .

+ Kẻ  $AK \perp HB$

+  $\begin{cases} AK \perp HB \\ AK \perp SH \end{cases} \Rightarrow AK \perp (SHB) \Rightarrow d(A, (SHB)) = AK$

• **Khối chóp có các cạnh bên bằng nhau**

Cho hình chóp có đỉnh  $S$  có các cạnh bên có độ dài bằng nhau:  $SA = SB = SC = SD$  (đáy có thể là bốn đỉnh hoặc ba đỉnh). Khi đó nếu như  $O$  là tâm đường tròn ngoại tiếp đi qua các đỉnh nằm trên mặt đáy thì  $SO$  là trục đường tròn ngoại tiếp của đa giác đáy hay nói cách khác:  $SO \perp (ABCD) \Rightarrow d(S, (ABCD)) = SO$ .

Chú ý:

Nếu đáy là:

+ Tam giác đều,  $O$  là trọng tâm.

+ Tam giác vuông,  $O$  là trung điểm cạnh huyền.

+ Hình vuông, hình chữ nhật,  $O$  là giao của 2 đường chéo đồng thời là trung điểm mỗi đường.

### 3. Khoảng cách dựng gián tiếp

Giả sử ta muốn dựng trực tiếp khoảng cách từ điểm  $(P)$  tới mặt phẳng  $(P)$  mà không thực hiện được. Đồng thời từ điểm  $B$  ta lại dựng được trực tiếp khoảng cách tới khi đó ta sẽ thực hiện tính khoảng cách gián tiếp như sau:

- **Cách 1(Đổi điểm) Tính thông qua tỉ số khoảng cách.**

TH1: Khi  $AB \parallel (P)$  thì:

$$d(A, (P)) = d(B, (P))$$

TH2: Khi  $AB \cap (P) = \{I\}$  thì:

$$\frac{d(A, (P))}{d(B, (P))} = \frac{AI}{BI}$$

- **Cách 2 (Đổi đỉnh): Sử dụng phương pháp thể tích để tìm khoảng cách:**

Bài toán tính khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng trong nhiều trường hợp có thể quy về bài toán thể tích khối đa diện. Việc tính khoảng cách này dựa vào công thức:

$$h = \frac{3V}{S}$$

$V, S, h$  lần lượt là thể tích, diện tích đáy và chiều cao của hình chóp.

$$h = \frac{V}{S}$$

$V, S, h$  lần lượt là thể tích, diện tích đáy và chiều cao của hình lăng trụ.

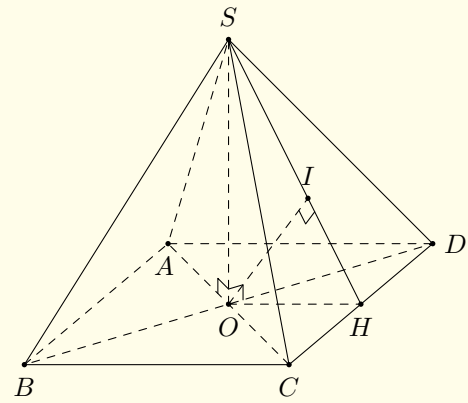
*Phương pháp này áp dụng được trong trường hợp sau: Giả sử có thể quy bài toán tìm khoảng cách về bài toán tìm chiều cao của một hình chóp (hoặc một lăng trụ) nào đó. Dĩ nhiên, các chiều cao này thường là không tính được trực tiếp bằng cách sử dụng các phương pháp thông thường như định lý Pitago, công thức lượng giác,.. Tuy nhiên, các khối đa diện này lại dễ dàng tính được thể tích và diện tích đáy. Như vậy, chiều cao của nó sẽ được xác định bởi công thức đơn giản trên.*

## **B** BÀI TẬP MẪU

### **CÂU 38 (Đề minh họa BGD 2022-2023).**

Cho hình chóp đều  $S.ABCD$  có chiều cao  $a$ ,  $AC = 2a$  (tham khảo hình bên). Khoảng cách từ  $B$  đến mặt phẳng  $(SCD)$  bằng

- (A)  $\frac{\sqrt{3}}{3}a$ .      (B)  $\sqrt{2}a$ .      (C)  $\frac{2\sqrt{3}}{3}a$ .      (D)  $\frac{\sqrt{2}}{2}a$ .



### 🕒 BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ PHÁT TRIỂN

**Câu 38.1.** Cho hình chóp  $S.ABC$  có đáy  $ABC$  là tam giác vuông tại  $B$  và cạnh bên  $SB$  vuông góc với mặt phẳng đáy. Cho biết  $SB = 3a$ ,  $AB = 4a$ ,  $BC = 2a$ . Tính khoảng cách từ  $B$  đến mặt phẳng  $(SAC)$ .

- (A)  $\frac{12\sqrt{61}a}{61}$ .      (B)  $\frac{4a}{5}$ .      (C)  $\frac{12\sqrt{29}a}{29}$ .      (D)  $\frac{3\sqrt{14}a}{14}$ .

**Câu 38.2.** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy  $ABCD$  là hình thang vuông tại  $A$  và  $B$ ,  $AB = BC = a$ ,  $AD = 2a$ . Biết  $SA = a\sqrt{3}$ ,  $SA \perp (ABCD)$ . Gọi  $H$  là hình chiếu của  $A$  trên  $(SBC)$ . Tính khoảng cách  $d$  từ  $H$  đến mặt phẳng  $(SCD)$ .

- (A)  $d = \frac{3a\sqrt{50}}{80}$ .      (B)  $d = \frac{3a\sqrt{30}}{40}$ .      (C)  $d = \frac{3a\sqrt{10}}{20}$ .      (D)  $d = \frac{3a\sqrt{15}}{60}$ .

**Câu 38.3.** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy là hình vuông  $ABCD$  cạnh  $a$ , mặt phẳng  $(SAB)$  vuông góc với đáy và tam giác  $SAB$  đều. Gọi  $M$  là trung điểm của  $SA$ . Tính khoảng cách từ  $M$  đến mặt phẳng  $(SCD)$ .

- (A)  $\frac{a\sqrt{21}}{14}$ .      (B)  $\frac{a\sqrt{21}}{7}$ .      (C)  $\frac{a\sqrt{3}}{14}$ .      (D)  $\frac{a\sqrt{3}}{7}$ .

**Câu 38.4.** Hình chóp  $S.ABCD$  đáy hình vuông cạnh  $a$ ,  $SA \perp (ABCD)$ ;  $SA = a\sqrt{3}$ . Khoảng cách từ  $B$  đến mặt phẳng  $(SCD)$  bằng bao nhiêu?

- (A)  $a\sqrt{3}$ .      (B)  $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ .      (C)  $2a\sqrt{3}$ .      (D)  $\frac{a\sqrt{3}}{4}$ .

**Câu 38.5.** Cho hình lập phương  $ABCD.A'B'C'D'$  có độ dài cạnh bằng 10. Tính khoảng cách giữa hai mặt phẳng  $(ADD'A')$  và  $(BCC'B')$ .

- (A) 10.      (B)  $\sqrt{10}$ .      (C) 100.      (D) 5.

**Câu 38.6.** Cho hình lăng trụ đứng  $ABC.A'B'C'$  có đáy là tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$  có  $BC = 2a$ ,  $AB = a\sqrt{3}$ . Tính khoảng cách từ  $AA'$  đến mặt phẳng  $(BCC'B')$ .

- (A)  $\frac{a\sqrt{21}}{7}$ .      (B)  $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ .      (C)  $\frac{a\sqrt{5}}{2}$ .      (D)  $\frac{a\sqrt{7}}{3}$ .

**Câu 38.7.** Cho tứ diện  $ABCD$  có cạnh  $AD$  vuông góc với mặt phẳng  $(ABC)$ ,  $AC = AD = 4$ ,  $AB = 3$ ,  $BC = 5$ . Tính khoảng cách  $d$  từ điểm  $A$  đến mặt phẳng  $(BCD)$ .

A  $d = \frac{12}{\sqrt{34}}$ .     
  B  $d = \frac{60}{\sqrt{769}}$ .     
  C  $d = \frac{\sqrt{769}}{60}$ .     
  D  $d = \frac{\sqrt{34}}{12}$ .

**Câu 38.8.** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy  $ABCD$  là hình vuông cạnh  $a$ , mặt bên  $SAB$  là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy. Tính khoảng cách  $h$  từ điểm  $A$  đến mặt phẳng  $(SCD)$ .

A  $h = \frac{a\sqrt{21}}{7}$ .     
  B  $h = a$ .     
  C  $h = \frac{a\sqrt{3}}{4}$ .     
  D  $h = \frac{a\sqrt{3}}{7}$ .

**Câu 38.9.** Cho hình chóp  $S.ABC$  có hai mặt  $ABC$  và  $SBC$  là tam giác đều, hai mặt còn lại là tam giác vuông. Tính khoảng cách từ  $A$  đến  $(SBC)$  biết  $BC = a\sqrt{2}$ .

A  $d(A; (SBC)) = \frac{a}{\sqrt{2}}$ .     
  B  $d(A; (SBC)) = \frac{1}{\sqrt{3}}$ .  
 C  $d(A; (SBC)) = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$ .     
  D  $d(A; (SBC)) = a\sqrt{2}$ .

**Câu 38.10.** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy  $ABCD$  là hình thang vuông tại  $A$  và  $B$ . Biết  $AD = 2a$ ,  $AB = BC = SA = a$ . Cạnh bên  $SA$  vuông góc với mặt đáy, gọi  $M$  là trung điểm của  $AD$ . Tính khoảng cách  $h$  từ  $M$  đến mặt phẳng  $(SCD)$ .

A  $h = \frac{a}{3}$ .     
  B  $h = \frac{a\sqrt{6}}{6}$ .     
  C  $h = \frac{a\sqrt{3}}{6}$ .     
  D  $h = \frac{a\sqrt{6}}{3}$ .

**Câu 38.11.** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy  $ABCD$  là hình vuông cạnh  $a$ , tam giác  $SAB$  đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Gọi  $I$  là trung điểm của  $AB$  và  $M$  là trung điểm của  $AD$ . Tính khoảng cách từ  $I$  đến mặt phẳng  $(SMC)$ .

A  $\frac{3\sqrt{2}a}{8}$ .     
  B  $\frac{\sqrt{30}a}{10}$ .     
  C  $\frac{\sqrt{30}a}{8}$ .     
  D  $\frac{3\sqrt{7}a}{14}$ .

**Câu 38.12.** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy là hình vuông cạnh  $a$ , tam giác  $SAB$  đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Tính khoảng cách từ  $A$  đến mặt phẳng  $(SCD)$ .

A  $\frac{2a\sqrt{3}}{7}$ .     
  B  $\frac{3a}{7}$ .     
  C  $\frac{a\sqrt{21}}{7}$ .     
  D  $\frac{a\sqrt{3}}{7}$ .

**Câu 38.13.** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy là hình chữ nhật,  $SA \perp (ABCD)$ . Biết  $AB = a$ ,  $AD = 2a$ , góc giữa  $SC$  và  $(SAB)$  là  $30^\circ$ . Tính khoảng cách từ điểm  $B$  đến  $(SCD)$ .

A  $\frac{2a}{\sqrt{15}}$ .     
  B  $\frac{2a}{\sqrt{7}}$ .     
  C  $\frac{2a\sqrt{11}}{\sqrt{15}}$ .     
  D  $\frac{22a}{\sqrt{15}}$ .

**Câu 38.14.** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy  $ABCD$  là hình chữ nhật,  $AB = 3$ ,  $AD = 1$ . Hình chiếu vuông góc của  $S$  trên mặt phẳng  $(ABCD)$  là điểm  $H$  thuộc cạnh đáy  $AB$  sao cho  $AH = 2HB$ . Tính khoảng cách từ điểm  $A$  đến mặt phẳng  $(SHC)$ .

A  $3\sqrt{2}$ .     
  B  $2\sqrt{2}$ .     
  C  $\sqrt{2}$ .     
  D  $2$ .

**Câu 38.15.** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy  $ABCD$  là hình vuông tâm  $O$ ,  $SA \perp (ABCD)$ . Gọi  $I$  là trung điểm  $SC$ . Khoảng cách từ  $I$  đến mặt phẳng  $(ABCD)$  bằng độ dài đoạn nào?

A  $IO$ .     
  B  $IA$ .     
  C  $IC$ .     
  D  $IB$ .

**Câu 38.16.** Cho hình lăng trụ tam giác đều  $ABC.A'B'C'$  có tất cả các cạnh bằng  $a$ . Khoảng cách từ  $A$  đến mặt phẳng  $(A'BC)$  bằng

A  $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ .     
  B  $\frac{a\sqrt{6}}{4}$ .     
  C  $\frac{a\sqrt{21}}{7}$ .     
  D  $\frac{a\sqrt{3}}{4}$ .

**Câu 38.17.** Cho hình chóp tam giác đều  $S.ABC$  có cạnh đáy bằng  $a$ . Góc giữa mặt bên và mặt đáy bằng  $60^\circ$ . Khoảng cách từ điểm  $A$  đến mặt phẳng  $(SBC)$  bằng

A  $\frac{3a}{4}$ .     
  B  $\frac{a}{4}$ .     
  C  $\frac{a}{2}$ .     
  D  $\frac{3a}{2}$ .

**Câu 38.18.** Cho lăng trụ đứng  $ABC.A'B'C'$  có đáy là tam giác vuông tại  $B$  với  $AB = a$ ,  $AA' = 2a$ ,  $A'C = 3a$ . Gọi  $M$  là trung điểm cạnh  $C'A'$ ,  $I$  là giao điểm của các đường thẳng  $AM$  và  $A'C$ . Tính khoảng cách  $d$  từ  $A$  tới  $(IBC)$ .

A  $d = \frac{a}{\sqrt{5}}$ .     
  B  $d = \frac{a}{2\sqrt{5}}$ .     
  C  $d = \frac{5a}{3\sqrt{2}}$ .     
  D  $d = \frac{2a}{\sqrt{5}}$ .

**Câu 38.19.** Cho hình lăng trụ tam giác đều  $ABC.A'B'C'$  có tất cả các cạnh bằng  $a$ . Tính khoảng cách  $d$  từ điểm  $A$  đến mặt phẳng  $(A'BC)$ .

A  $d = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ .     
  B  $d = \frac{a\sqrt{6}}{4}$ .     
  C  $d = \frac{a\sqrt{21}}{7}$ .     
  D  $d = \frac{a\sqrt{3}}{4}$ .

**Câu 38.20.** Cho tứ diện  $ABCD$  có  $AB = 2a$ ,  $CD = a$ ,  $\widehat{ACB} = \widehat{ADB} = 90^\circ$ . Đáy  $BCD$  là tam giác cân tại  $B$  và  $\widehat{CBD} = 2\alpha$ . Tính khoảng cách từ  $A$  đến  $(BCD)$  theo  $a$  và  $\alpha$ .

A  $\frac{a}{\sin 2\alpha} \sqrt{4 \sin^2 2\alpha - 2}$ .     
  B  $\frac{a}{\sin 2\alpha} \sqrt{4 \sin^2 2\alpha - 1}$ .  
 C  $\frac{a}{2 \sin 2\alpha} \sqrt{4 \sin^2 2\alpha - 1}$ .     
  D  $\frac{2a}{\sin 2\alpha} \sqrt{4 \sin^2 2\alpha - 1}$ .

**D BẢNG ĐÁP ÁN**

38.1. A	38.2. B	38.3. A	38.4. B	38.5. A	38.6. B	38.7. A	38.8. A
38.9. A	38.10. B	38.11. A	38.12. C	38.13. C	38.14. C	38.15. A	38.16. C
38.17. A	38.18. D	38.19. C	38.20. B				

## DẠNG 39. PHƯƠNG TRÌNH MŨ VÀ PHƯƠNG TRÌNH LOGARIT

### A KIẾN THỨC CẦN NHỚ

#### 1. Công thức logarit

Với  $a > 0, a \neq 1$  và  $b > 0, c > 0$ , ta luôn có

- $\log_{a^m} b^n = \frac{n}{m} \log_a b, m \neq 0.$
- $\log_a \left(\frac{b}{c}\right) = \log_a b - \log_a c$
- $\log_a(bc) = \log_a b + \log_a c$
- $\log_a b \log_b c = \log_a c \quad (b \neq 1)$

#### 2. Tính chất

Nếu hàm số  $y = f(x)$  đơn điệu 1 chiều trên miền  $D$  và tồn tại  $u, v \in D$ , thì khi đó phương trình

$$f(u) = f(v) \Leftrightarrow u = v.$$

### B BÀI TẬP MẪU

#### CÂU 39 (Đề minh họa BGD 2022-2023).

Có bao nhiêu số nguyên  $x$  thỏa mãn  $\log_3 \frac{x^2 - 16}{343} < \log_7 \frac{x^2 - 16}{27}$ ?

- (A) 193.                      (B) 92.                      (C) 186.                      (D) 184.

### C BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ PHÁT TRIỂN

**Câu 39.1.** Có bao nhiêu cặp số nguyên  $(x; y)$  thỏa mãn  $2(x + \ln(x + 1)) + x^2 + 1 = y + e^y$  và  $0 \leq x \leq 2020$ ?

- (A) 0.                      (B) 7.                      (C) 1.                      (D) 8.

**Câu 39.2.** Gọi  $x_1, x_2$  là hai nghiệm thực của phương trình  $\log_3 \frac{x-2}{x^2-4x+5} - x^2 + 7x - 10 = 0$ . Tính  $|x_1 - x_2|$ .

- (A) 3.                      (B) 5.                      (C)  $\sqrt{3}$ .                      (D)  $\sqrt{5}$ .

**Câu 39.3.** Biết  $x_1, x_2$  là hai nghiệm của phương trình  $\log_7 \left(\frac{4x^2 - 4x + 1}{2x}\right) + 4x^2 + 1 = 6x$  và  $x_1 + 2x_2 = \frac{1}{4}(a + \sqrt{b})$  với  $a, b$  là hai số nguyên dương. Tính  $a + b$ .

- (A)  $a + b = 14$ .                      (B)  $a + b = 13$ .                      (C)  $a + b = 16$ .                      (D)  $a + b = 11$ .

**Câu 39.4.** Phương trình  $\ln \frac{x^2 + 3x + 4}{-x + 2} + x^2 + 4x + 2$  có hai nghiệm  $x_1, x_2$ . Khi đó  $x_1 + x_2$  bằng.

- (A) -2.                      (B) 2.                      (C) 4.                      (D) -4.

**Câu 39.5.** Biết  $x_1, x_2, (x_1 > x_2)$  là hai nghiệm của phương trình  $\log_3 \left( \frac{x^2 - 2x + 1}{3x} \right) + x^2 + 2x = 3x$  và  $4x_1 + 2x_2 = a + \sqrt{b}$ , với  $a, b$  là hai số nguyên dương. Tính  $a + b$ .

- (A)  $a + b = 14$ .      (B)  $a + b = 12$ .      (C)  $a + b = 7$ .      (D)  $a + b = 9$ .

**Câu 39.6.** Cho phương trình  $\frac{1}{2} \log_2(x + 2) + x + 3 = \log_2 \frac{2x + 1}{x} + \left(1 + \frac{1}{x}\right)^2 + 2\sqrt{x + 2}$ , gọi  $S$  là tổng tất cả các nghiệm của nó. Khi đó, giá trị của  $S$  là.

- (A)  $S = \frac{1 + \sqrt{13}}{2}$ .      (B)  $S = \frac{1 - \sqrt{13}}{2}$ .      (C)  $S = 2$ .      (D)  $S = -2$ .

**Câu 39.7.** Số nghiệm nguyên của bất phương trình  $\log_3 \frac{3x^2 + x + 1}{2x^2 + 2x + 3} + x^2 - x - 2 \leq 0$  là.

- (A) 2.      (B) 4.      (C) 1.      (D) 3.

**Câu 39.8.** Tìm số nghiệm nguyên của bất phương trình  $2^{2x^2 - 15x + 100} - 2^{x^2 + 10x - 50} + x^2 - 25x + 150 < 0$ .

- (A) 5.      (B) 3.      (C) 6.      (D) 4.

**Câu 39.9.** Tìm tổng tất cả các nghiệm của phương trình

$$\frac{1}{2} \log_2(x + 3) = \log_2(x + 1) + x^2 - x - 4 + 2\sqrt{x + 3}.$$

- (A)  $S = 2$ .      (B)  $S = -1$ .      (C)  $S = 1 - \sqrt{2}$ .      (D)  $S = 1$ .

**Câu 39.10.** Phương trình  $2 \log_3(\cot x) = \log_2(\cos x)$  có bao nhiêu nghiệm trong khoảng  $(0; 2018\pi)$ .

- (A) 2017 nghiệm.      (B) 1009 nghiệm.      (C) 2018 nghiệm.      (D) 1008 nghiệm.

**Câu 39.11.** Phương trình  $\log_2 \frac{x^2 + 3x + 2}{3x^2 - 5x + 8} = x^2 - 4x + 3$  có nghiệm các nghiệm  $x_1, x_2$ . Hãy tính giá trị của biểu thức  $A = x_1^2 + x_2^2 - 3x_1x_2$ .

- (A) -31.      (B) 1.      (C) -1.      (D) 31.

**Câu 39.12.** Biết rằng phương trình  $\log_2(1 + x^{1009}) = 2018 \log_3 x$  có nghiệm duy nhất  $x_0$ . Khẳng định nào sau đây là đúng.

- (A)  $1 < x_0 < 3^{\frac{1}{1008}}$ .      (B)  $3^{\frac{1}{1007}} < x_0 < 1$ .      (C)  $3^{\frac{1}{1008}} < x_0 < 3^{\frac{1}{1006}}$ .      (D)  $x_0 > 3^{\frac{2}{1009}}$ .

**Câu 39.13.** Biết  $x_1, x_2$  là hai nghiệm của phương trình  $\log_7 \left( \frac{4x^2 - 4x + 1}{2x} \right) + 4x^2 + 1 = 6x$  và  $x_1 + 2x_2 = \frac{1}{4}(a + \sqrt{b})$  với  $a, b$  là hai số nguyên dương. Tính  $a + b$ .

- (A)  $a + b = 13$ .      (B)  $a + b = 16$ .      (C)  $a + b = 11$ .      (D)  $a + b = 14$ .

**Câu 39.14.** Có bao nhiêu cặp số nguyên dương  $(x; y)$  với  $x \leq 2020$  thỏa mãn  $\log_2(x - 1) + 2x - 2y = 1 + 4^y$ .

- (A) 6.      (B) 2020.      (C) 5.      (D) 1010.

**Câu 39.15.** Cho các số thực  $x, y$  thỏa mãn  $2x - y = e^x(2 - e^x) + \ln(2e^x + y)$ . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức  $P = x^2 + y^2 = 20y$ .

- (A) -19.                      (B) -21.                      (C) -100.                      (D) 0.

**Câu 39.16.** Cho phương trình  $\log_2 \frac{4x + 2019}{x^2 - 2x + 3} = x^2 - 6x - 2016$ . Tổng tất cả các nghiệm của phương trình là.

- (A) 5.                          (B) 6.                          (C) 4.                          (D) 2.

**Câu 39.17.** Tính tổng tất cả các nghiệm của phương trình

$$\log \frac{x^3 + 3x^2 - 3x - 5}{x^2 + 1} + (x + 1)^3 = x^2 + 6x + 7.$$

- (A) -2.                          (B) 0.                          (C)  $-2 - \sqrt{3}$ .                      (D)  $-2 + \sqrt{3}$ .

**Câu 39.18.** Cho phương trình  $\frac{1}{2} \log_2(x + 2) + x + 3 = \log_2 \frac{2x + 1}{x} + \left(1 + \frac{1}{x}\right)^2 + 2\sqrt{x + 2}$ , gọi  $S$  là tổng tất cả các nghiệm của nó. Khi đó, giá trị của  $S$  là.

- (A)  $S = 2$ .                      (B)  $S = \frac{1 + \sqrt{13}}{2}$ .                      (C)  $S = -2$ .                      (D)  $S = \frac{1 - \sqrt{13}}{2}$ .

**Câu 39.19.** Cho phương trình  $\log(x - 3) + 2\sqrt{x - 3} + 6x - 16 = 2\log(x - 4) + 2(x - 3)^3$  có một nghiệm có dạng  $x = \frac{a + \sqrt{b}}{2}$ , trong đó  $a, b$  là hai số nguyên dương. Giá trị của biểu thức  $a + b$  bằng.

- (A) 14.                          (B) 5.                          (C) 9.                          (D) 10.

**Câu 39.20.** Cho phương trình  $\frac{1}{2} \log_2(x + 2) + x + 3 = \log_2 \frac{2x + 1}{x} + \left(1 + \frac{1}{x}\right)^2 + 2\sqrt{x + 2}$ , gọi  $S$  là tổng tất cả các nghiệm của nó. Khi đó, giá trị của  $S$  là.

- (A)  $S = \frac{1 + \sqrt{13}}{2}$ .                      (B)  $S = \frac{1 - \sqrt{13}}{2}$ .                      (C)  $S = 2$ .                      (D)  $S = -2$ .

**(D) BẢNG ĐÁP ÁN**

39.1. C	39.2. D	39.3. A	39.4. D	39.5. A	39.6. A	39.7. B	39.8. D
39.9. D	39.10. C	39.11. B	39.12. A	39.13. D	39.14. C	39.15. A	39.16. B
39.17. B	39.18. B	39.19. A	39.20. A				



## DẠNG 40. TÍCH PHÂN HÀM ẨN

### KIẾN THỨC CẦN NHỚ

### 1. Định nghĩa

Nếu hàm số  $f(x)$  liên tục trên  $[a; b]$  và  $F(x)$  là một nguyên hàm của  $f(x)$  trên  $[a; b]$  thì

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a). \quad (*)$$

Tên gọi

- $\int_a^b f(x) dx$  đọc là “Tích phân từ  $a$  đến  $b$  của  $f(x) dx$ ”.
- $a$  và  $b$  gọi là hai cận của tích phân, trong đó  $a$  là cận dưới và  $b$  là cận trên.
- $(*)$  gọi là công thức **Newton-Leibnitz**.

### 2. Tính chất

a)  $\int_a^b [m \cdot f(x) \pm n \cdot g(x)] dx = m \int_a^b f(x) dx \pm n \int_a^b g(x) dx$

b)  $\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx, \forall c \in [a; b]$ .

c)  $\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx; \int_a^a f(x) dx = 0$ .

d)  $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(t) dt = \int_a^b f(u) du = \dots$

### 3. Phương pháp đổi biến số

Cho hàm số  $f(x)$  liên tục trên đoạn  $[a; b]$ . Giả sử hàm số  $x = \phi(t)$  có đạo hàm liên tục trên đoạn  $[\alpha; \beta]$  sao cho  $\phi(\alpha) = a, \phi(\beta) = b$  và  $a \leq \phi(t) \leq b$  với mọi  $t \in [\alpha; \beta]$ . Khi đó

$$\int_a^b f(x) dx = \int_\alpha^\beta f(\phi(t)) \phi'(t) dt.$$

### 4. Phương pháp tích phân từng phần

Nếu  $u = u(x)$  và  $v = v(x)$  là hai hàm số có đạo hàm liên tục trên đoạn  $[a; b]$  thì

$$\int_a^b u(x) \cdot v'(x) dx = [u(x) \cdot v(x)] \Big|_a^b - \int_a^b u'(x) \cdot v(x) dx$$

hay  $\int_a^b u dv = (u \cdot v) \Big|_a^b - \int_a^b v du.$

**B BÀI TẬP MẪU**

**CÂU 40 (Đề minh họa 2023 - BGD&ĐT).**

Cho hàm số  $f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$ . Gọi  $F(x), G(x)$  là hai nguyên hàm của  $f(x)$  trên  $\mathbb{R}$  thỏa mãn  $F(4) + G(4) = 4$  và  $F(0) + G(0) = 1$ . Khi đó  $\int_0^2 f(2x) dx$  bằng

- (A) 3.                      (B)  $\frac{3}{4}$ .                      (C) 6.                      (D)  $\frac{3}{2}$ .

**C BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ PHÁT TRIỂN**

**Câu 40.1.** Cho hàm số  $f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$ . Gọi  $F(x), G(x)$  là hai nguyên hàm của  $f(x)$  trên  $\mathbb{R}$  thỏa mãn  $F(-25) + G(-25) = 6$  và  $F(-33) + G(-33) = 9$ . Tính  $\int_{-5}^{-4} f(8x + 7) dx$ .

- (A) 15.                      (B)  $-\frac{3}{16}$ .                      (C) -3.                      (D)  $\frac{3}{8}$ .

**Câu 40.2.** Cho hàm số  $f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$ . Gọi  $F(x), G(x)$  là hai nguyên hàm của  $f(x)$  trên  $\mathbb{R}$  thỏa mãn  $F(22) + G(22) = -1$  và  $F(-33) + G(-33) = 0$ . Tính  $\int_{-6}^5 f(5x - 3) dx$ .

- (A) 11.                      (B) -11.                      (C)  $\frac{1}{10}$ .                      (D)  $-\frac{1}{10}$ .

**Câu 40.3.** Cho hàm số  $f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$ . Gọi  $F(x), G(x)$  là hai nguyên hàm của  $f(x)$  trên  $\mathbb{R}$  thỏa mãn  $F(52) + G(52) = 0$  và  $F(-46) + G(-46) = -8$ . Tính  $\int_{-7}^7 f(7x + 3) dx$ .

- (A)  $\frac{4}{7}$ .                      (B) 8.                      (C)  $\frac{1}{14}$ .                      (D)  $-\frac{4}{7}$ .

**Câu 40.4.** Cho hàm số  $f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$ . Gọi  $F(x), G(x)$  là hai nguyên hàm của  $f(x)$  trên  $\mathbb{R}$  thỏa mãn  $F(132) + G(132) = 3$  và  $F(-28) + G(-28) = 8$ . Tính  $\int_{-3}^{17} f(8x - 4) dx$ .

- (A) 5.                      (B) -5.                      (C)  $\frac{5}{16}$ .                      (D)  $-\frac{5}{16}$ .

**Câu 40.5.** Cho hàm số  $f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$ . Gọi  $F(x), G(x)$  là hai nguyên hàm của  $f(x)$  trên  $\mathbb{R}$  thỏa mãn  $F(147) + G(147) = 2$  và  $F(28) + G(28) = -3$ . Tính  $\int_4^{21} f(7x) dx$ .

- (A) 5.                      (B)  $\frac{5}{14}$ .                      (C) -5.                      (D)  $-\frac{5}{14}$ .

**Câu 40.6.** Cho hàm số  $f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$ . Gọi  $F(x), G(x)$  là hai nguyên hàm của  $f(x)$  trên  $\mathbb{R}$  thỏa mãn  $F(90) + G(90) = 4$  và  $F(27) + G(27) = 9$ . Tính  $\int_3^{12} f(7x + 6) dx$ .

- (A) 5.                      (B)  $\frac{5}{14}$ .                      (C) -5.                      (D)  $-\frac{5}{14}$ .

**Câu 40.7.** Cho hàm số  $f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$ . Gọi  $F(x), G(x)$  là hai nguyên hàm của  $f(x)$  trên  $\mathbb{R}$  thỏa mãn  $F(20) + G(20) = -4$  và  $F(8) + G(8) = 8$ . Tính  $\int_1^7 f(2x + 6)dx$ .

- (A) 3. (B) 4. (C) -3. (D) -4.

**Câu 40.8.** Cho hàm số  $f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$ . Gọi  $F(x), G(x)$  là hai nguyên hàm của  $f(x)$  trên  $\mathbb{R}$  thỏa mãn  $F(30) + G(30) = 5$  và  $F(2) + G(2) = -3$ . Tính  $\int_{-2}^{12} f(2x + 6)dx$ .

- (A) 2. (B) 8. (C) -2. (D) -8.

**Câu 40.9.** Cho hàm số  $f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$ . Gọi  $F(x), G(x)$  là hai nguyên hàm của  $f(x)$  trên  $\mathbb{R}$  thỏa mãn  $F(50) + G(50) = -2$  và  $F(-58) + G(-58) = -7$ . Tính  $\int_{-6}^6 f(9x - 4)dx$ .

- (A)  $-\frac{5}{9}$ . (B)  $-\frac{5}{18}$ . (C)  $\frac{5}{18}$ . (D)  $\frac{5}{9}$ .

**Câu 40.10.** Cho hàm số  $f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$ . Gọi  $F(x), G(x)$  là hai nguyên hàm của  $f(x)$  trên  $\mathbb{R}$  thỏa mãn  $F(32) + G(32) = -8$  và  $F(-44) + G(-44) = -3$ . Tính  $\int_{-9}^{10} f(4x - 8)dx$ .

- (A)  $\frac{5}{4}$ . (B)  $-\frac{5}{8}$ . (C)  $\frac{5}{8}$ . (D)  $-\frac{5}{4}$ .

**Câu 40.11.** Cho hàm số  $f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  thỏa mãn  $\int_0^7 f(x) dx = 10, \int_0^3 f(x) dx = 6$ . Tính

$$I = \int_{-2}^3 f(|3 - 2x|) dx.$$

- (A) 16. (B) 3. (C) 15. (D) 8.

**Câu 40.12.** Cho hàm số  $f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$ . Biết  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x \cdot f(\cos^2 x) dx = 1$ , khi đó  $I =$

$$\int_0^1 [2f(1-x) - 3x^2 + 5] dx \text{ bằng}$$

- (A) 6. (B) 4. (C) 5. (D) 3.

**Câu 40.13.** Cho hàm số  $f(x)$  thỏa mãn  $f(2) = 25$  và  $f'(x) = 4x\sqrt{f(x)}$  với mọi  $x \in \mathbb{R}$ . Khi đó  $\int_2^3 f(x) dx$  bằng

- (A)  $\frac{1073}{15}$ . (B)  $\frac{458}{15}$ . (C)  $\frac{838}{15}$ . (D)  $\frac{1016}{15}$ .

**Câu 40.14.** Cho hàm số  $f(x)$  thỏa mãn  $\int_0^1 (x+1)f'(x) dx = 10$  và  $2f(1) - f(0) = 2$ . Tính

$$I = \int_0^1 f(x) dx.$$

- (A)  $I = 1$ . (B)  $I = 8$ . (C)  $I = -12$ . (D)  $I = -8$ .

**Câu 40.15.** Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  và thỏa mãn  $f(-x) + 2018f(x) = 2x \sin x$ .

Tính  $I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx$ .

- (A)  $\frac{2}{2018}$ .      (B)  $\frac{2}{1009}$ .      (C)  $\frac{4}{2019}$ .      (D)  $\frac{2}{2019}$ .

**Câu 40.16.** Biết  $\int_0^{\pi} f(\sin x) dx = 1$ . Tính  $\int_0^{\pi} xf(\sin x) dx$ .

- (A)  $\frac{\pi}{2}$ .      (B) 0.      (C)  $\pi$ .      (D)  $\frac{1}{2}$ .

**Câu 40.17.** Cho hàm số  $f(x)$  có  $f(2) = 0$  và  $f'(x) = \frac{x+7}{\sqrt{2x-3}}, \forall x \in \left(\frac{3}{2}; +\infty\right)$ . Biết rằng

$\int_4^7 f\left(\frac{x}{2}\right) dx = \frac{a}{b}, (a, b \in \mathbb{Z}, b > 0), \frac{a}{b}$  là phân số tối giản. Khi đó  $a + b$  bằng

- (A) 250.      (B) 251.      (C) 133.      (D) 221.

**Câu 40.18.** Cho hàm số  $f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  và  $f(2) = 16, \int_0^2 f(x) dx = 4$ . Tính  $I = \int_0^1 xf'(2x) dx$ .

- (A) 20.      (B) 13.      (C) 7.      (D) 12.

**Câu 40.19.** Cho hàm số  $f(x)$  có đạo hàm và liên tục trên  $[0; 1]$ , thỏa mãn  $\int_1^2 f(x-1) dx = 3$  và

$f(1) = 4$ . Tích phân  $\int_0^1 x^3 f'(x^2) dx$ .

- (A) 1.      (B) -1.      (C)  $-\frac{1}{2}$ .      (D)  $\frac{1}{2}$ .

**Câu 40.20.** Cho hàm số  $f(x)$  có  $f(1) = 1$  và  $f'(x) = -\frac{\ln x}{x^2}, \forall x > 0$ . Khi đó  $I = \int_1^e f(x) dx$

bằng

- (A)  $I = -\frac{3}{2}$ .      (B)  $I = \frac{3}{2}$ .      (C)  $I = \frac{2}{e} - 1$ .      (D)  $I = 1 - \frac{2}{e}$ .

### **(D) BẢNG ĐÁP ÁN**

40.1. B	40.2. D	40.3. A	40.4. C	40.5. B	40.6. D	40.7. C	40.8. A
40.9. C	40.10. B	40.11. D	40.12. A	40.13. C	40.14. D	40.15. C	40.16. A
40.17. B	40.18. C	40.19. D	40.20. B				

## DẠNG 41. CỰC TRỊ

### A KIẾN THỨC CẦN NHỚ

#### 1. Cực trị

- Số cực trị của hàm số là số nghiệm đơn hoặc bội lẻ của phương trình  $f'(x) = 0$ .
- Do đó, để tìm số điều kiện để hàm số có  $n$  cực trị thì ta đi tìm điều kiện của  $m$  để phương trình  $f'(x) = 0$  có  $n$  nghiệm bội lẻ.
- Ta thường phân li  $m$  của phương trình về dạng  $m = g(x)$  và dùng công cụ khảo sát hàm số tìm điều kiện  $m$  thỏa mãn bài toán.
- Phương trình đường thẳng qua các điểm cực trị của hàm số bậc ba  $y = ax^3 + bx^2 + cx + d, (a \neq 0)$  là

$$g(x) = \left( \frac{2c}{3} - \frac{2b^2}{9a} \right) x + d - \frac{bc}{9a}$$

hoặc

$$g(x) = y - \frac{y'.y''}{18a}$$

hoặc

$$g(x) = y - \frac{y'.y''}{3y'''}$$

- Giả sử hàm số  $y = ax^4 + bx^2 + c$  có ba cực trị, thì tọa độ ba điểm cực trị là:

$$A(0; c), B\left(-\sqrt{-\frac{b}{2a}}; -\frac{\Delta}{4a}\right), C\left(\sqrt{-\frac{b}{2a}}; -\frac{\Delta}{4a}\right)$$

### B BÀI TẬP MẪU

#### CÂU 41 (ĐỀ minh họa BGD 2022-2023).

Có bao nhiêu số nguyên  $m$  để hàm số  $y = x^3 - 3x^2 - mx + 4$  có hai điểm cực trị thuộc khoảng  $(-3; 3)$ ?

(A) 13.

(B) 10.

(C) 12.

(D) 11.

### C BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ PHÁT TRIỂN

**Câu 41.1.** Tính tổng các giá trị nguyên dương của tham số  $m$  để hàm số  $y = x^4 + (m - 5)x^2 + 5$  có 3 điểm cực trị.

(A) 4.

(B) 10.

(C) 15.

(D) 24.

**Câu 41.2.** Tìm tổng tất cả các giá trị nguyên của tham số  $m$  trên  $(-10; 10)$  để đồ thị hàm số  $y = x^3 + x^2 + mx - 1$  có điểm cực tiểu của nằm bên phải trục tung.

- (A) 0. (B) -55. (C) -45. (D) 45.

**Câu 41.3.** Có bao nhiêu giá trị thực của tham số  $m$  để đồ thị hàm số  $y = \frac{x^3}{3} - (5m^2 - 3m - 1)x^2 + (2m + 1)x + 1$  có hai điểm cực trị  $A, B$  sao cho  $A, B$  cách đều đường thẳng  $\Delta: x - 1 = 0$ ?

- (A) 1. (B) 0. (C) 2. (D) 3.

**Câu 41.4.** Tổng tất cả các giá trị của  $m$  để đồ thị hàm số  $y = x^3 + 3x^2 + m - 1$  có hai điểm cực trị  $A, B$  sao cho tam giác  $OAB$  vuông tại  $O$ .

- (A) 4. (B) -3. (C) -2. (D) 2.

**Câu 41.5.** Cho hàm số  $y = -x^3 - 3x^2 + 4$ . Biết rằng có hai giá trị  $m_1, m_2$  của tham số  $m$  để đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số tiếp xúc với đường tròn  $(C): (x - m)^2 + (y - m - 1)^2 = 5$ . Tính tổng  $m_1 + m_2$ .

- (A)  $m_1 + m_2 = -6$ . (B)  $m_1 + m_2 = 10$ . (C)  $m_1 + m_2 = 6$ . (D)  $m_1 + m_2 = 0$ .

**Câu 41.6.** Tìm tất cả các giá trị của tham số  $m$  sao cho đồ thị hàm số  $y = x^4 + (m + 1)x^2 - 2m - 1$  có ba điểm cực trị là ba đỉnh của một tam giác có một góc bằng  $120^\circ$ .

- (A)  $m < -1$ . (B)  $m = -1 - \frac{2}{\sqrt[3]{3}}, m = -1$ .  
 (C)  $m = -\frac{1}{\sqrt[3]{3}}$ . (D)  $m = -1 - \frac{2}{\sqrt[3]{3}}$ .

**Câu 41.7.** Cho biết đồ thị hàm số  $y = x^4 - 2mx^2 - 2m^2 + m^4$  có 3 điểm cực trị  $A, B, C$  cùng với điểm  $D(0; -3)$  là 4 đỉnh của một hình thoi. Gọi  $S$  là tổng các giá trị của  $m$  thỏa mãn đề bài thì  $S$  thuộc khoảng nào sau đây?

- (A)  $S \in \left(0; \frac{5}{2}\right)$ . (B)  $S \in \left(\frac{9}{2}; 6\right)$ . (C)  $S \in \left(1; \frac{5}{2}\right)$ . (D)  $S \in (2; 4)$ .

**Câu 41.8.** Cho hàm số  $y = x^4 + 2(m - 4)x^2 + m + 5$  có đồ thị  $(C_m)$ . Tìm  $m$  để  $(C_m)$  có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác nhọn gốc tọa độ  $O$  làm trọng tâm.

- (A)  $m = 4$ . (B)  $m = \frac{17}{2}$ .  
 (C)  $m = 1$  hoặc  $m = \frac{17}{2}$ . (D)  $m = 1$ .

**Câu 41.9.** Cho hàm số  $y = x^4 - 2mx^2 + 3m$   $(C_m)$ . Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số  $m$  để  $(C_m)$  có ba điểm cực trị và khoảng cách giữa hai điểm cực tiểu của  $(C_m)$  nhỏ hơn 4?

- (A) 3. (B) Vô số. (C) 4. (D) 1.

**Câu 41.10.** Biết đồ thị hai hàm số  $y = x^4 - 2x^2 + 2$  và  $y = mx^4 + nx^2 - 1$  có chung ít nhất một điểm cực trị. Giá trị của biểu thức  $2m + 3n$  bằng

- (A) 11. (B) 10. (C) 8. (D) 9.

**Câu 41.11.** Cho hàm số  $y = x^4 - 2mx^2 + 1 - m$ . Tìm tất cả các giá trị thực của tham số  $m$  để đồ thị hàm số có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác nhọn gốc tọa độ  $O$  làm trọng tâm.

- (A)  $m = -1$ .                      (B)  $m = 2$ .                      (C)  $m = 0$ .                      (D)  $m = 1$ .

**Câu 41.12.** Tìm tất cả các giá trị  $m$  sao cho đồ thị hàm số  $y = x^4 + (m + 1)x^2 - 2m - 1$  có ba điểm cực trị là ba đỉnh của một tam giác có một góc bằng  $120^\circ$ .

- (A)  $m = -\frac{1}{\sqrt[3]{3}}$ .                      (B)  $m < -1$ .  
 (C)  $m = -1 - \frac{2}{\sqrt[3]{3}}$ .                      (D)  $m = -1 - \frac{2}{\sqrt[3]{3}}, m = -1$ .

**Câu 41.13.** Tìm tất cả các giá trị của tham số  $m$  để đồ thị hàm số  $y = x^4 - 2m^2x^2 + 2m$  có ba điểm cực trị  $A, B, C$  sao cho  $O, A, B, C$  là ba đỉnh của một hình thoi (với  $O$  là gốc tọa độ).

- (A)  $m = 3$ .                      (B)  $m = -1$ .                      (C)  $m = 1$ .                      (D)  $m = 2$ .

**Câu 41.14.** Tìm giá trị của  $m$  để đồ thị hàm số  $y = x^4 - 2mx^2 + 2$  có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác có diện tích bằng 1.

- (A)  $m = \sqrt[3]{3}$ .                      (B)  $m = \sqrt{3}$ .                      (C)  $m = 3\sqrt{3}$ .                      (D)  $m = 1$ .

**Câu 41.15.** Với giá trị nào của tham số  $m$  thì đồ thị hàm số  $y = x^4 - 2(m - 1)x^2 + m^4 - 3m^2 + 2017$  có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác có diện tích bằng 32.

- (A)  $m = 5$ .                      (B)  $m = 3$ .                      (C)  $m = 2$ .                      (D)  $m = 4$ .

**Câu 41.16.** Cho hàm số  $y = x^4 - 2(m + 1)x^2 + m$  có đồ thị  $(C)$ ,  $m$  là tham số.  $(C)$  có ba điểm cực trị  $A, B, C$  sao cho  $OA = BC$ ; trong đó  $O$  là gốc tọa độ,  $A$  là điểm cực trị thuộc trục tung khi

- (A)  $m = 5 \pm 5\sqrt{5}$ .                      (B)  $m = 0$  hoặc  $m = 2$ .  
 (C)  $m = 2 \pm 2\sqrt{2}$ .                      (D)  $m = 3 \pm 3\sqrt{3}$ .

**Câu 41.17.** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số  $m$  sao cho đồ thị của hàm số  $y = x^4 - 2(m + 1)x^2 + m^2$  có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác vuông cân.

- (A)  $m = 1$ .                      (B)  $m = 1; m = 0$ .                      (C)  $m = 0$ .                      (D)  $m = -1; m = 0$ .

**Câu 41.18.** Gọi  $(C)$  là đường parabol qua ba điểm cực trị của đồ thị hàm số  $y = \frac{1}{4}x^4 - mx^2 + m^2$ , tìm  $m$  để  $(C)$  đi qua điểm  $A(2; 24)$ .

- (A)  $m = 6$ .                      (B)  $m = 4$ .                      (C)  $m = 3$ .                      (D)  $m = -4$ .

**Câu 41.19.** Cho hàm số  $y = x^4 - 2mx^2 + 3m - 2$  (với  $m$  là tham số). Có bao nhiêu giá trị của tham số  $m$  để đồ thị hàm số có ba điểm cực trị đều nằm trên các trục tọa độ?

- (A) 2.                      (B) 0.                      (C) 3.                      (D) 1.

**Câu 41.20.** Gọi  $S$  là tập hợp tất cả các giá trị của tham số  $m$  để hàm số  $y = x^4 - 2mx^2 + m + 1$  có giá trị cực tiểu bằng  $-1$ . Tổng các phần tử của  $S$  là

- (A)  $-2$ .                      (B) 0.                      (C) 1.                      (D)  $-1$ .



## **D** BẢNG ĐÁP ÁN

41.1. B	41.2. C	41.3. A	41.4. B	41.5. A	41.6. D	41.7. D	41.8. D
41.9. B	41.10.C	41.11.D	41.12.C	41.13.C	41.14.D	41.15.A	41.16.C
41.17.C	41.18.A	41.19.A	41.20.B				

## DẠNG 42. CỰC TRỊ CỦA SỐ PHỨC

### A KIẾN THỨC CẦN NHỚ

#### 1. Môđun của số phức

Số phức  $z = a + bi$  được biểu diễn bởi điểm  $M(x; y)$  trên mặt phẳng  $Oxy$ . Độ dài véc-tơ  $\overrightarrow{OM}$  được gọi là môđun của số phức  $z$ .

Kí hiệu  $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ .

Tính chất:

- $|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{z \cdot \bar{z}} = |\overrightarrow{OM}|$ .
- $|z| \geq 0, \forall z \in \mathbb{C}, |z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$ .
- $|z \cdot z'| = |z| \cdot |z'|, \left| \frac{z}{z'} \right| = \frac{|z|}{|z'|}, z' \neq 0$ .
- $||z| - |z'|| \leq |z \pm z'| \leq |z| + |z'|$ .
- $|kz| = |k| \cdot |z|, k \in \mathbb{R}$ .
- $|z|^2 = z \cdot \bar{z} = a^2 + b^2$ .

Một số bất đẳng thức:

- $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$  dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi  $z_1 = kz_2 (k \geq 0)$ .
- $|z_1 - z_2| \leq |z_1| + |z_2|$  dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi  $z_1 = kz_2 (k \leq 0)$ .
- $|z_1 + z_2| \geq ||z_1| - |z_2||$  dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi  $z_1 = kz_2 (k \leq 0)$ .
- $|z_1 - z_2| \geq ||z_1| - |z_2||$  dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi  $z_1 = kz_2 (k \geq 0)$ .

### B BÀI TẬP MẪU

#### CÂU 42 (Đề minh họa BGD 2022-2023).

Xét các số phức  $z$  thỏa mãn  $|z^2 - 3 - 4i| = 2|z|$ . Gọi  $M$  và  $m$  lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của  $|z|$ . Giá trị của  $M^2 + m^2$  bằng

- (A) 28.                      (B)  $18 + 4\sqrt{6}$ .                      (C) 14.                      (D)  $11 + 4\sqrt{6}$ .

## **BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ PHÁT TRIỂN**

**Câu 42.1.** Xét tập hợp  $S$  các số phức  $x+yi$  ( $x, y \in \mathbb{R}$ ) thỏa mãn điều kiện  $|3z - \bar{z}| = |(1+i)(2+2i)|$ . Biểu thức  $Q = |z - \bar{z}|(2-x)$  đạt giá trị lớn nhất là  $M$  và đạt được tại  $z_0 = x_0 + y_0i$  (khi  $z$  thay đổi trong tập  $S$ ). Tính giá trị của  $T = M \cdot x_0 \cdot y_0^2$ .

(A)  $T = -\frac{9\sqrt{3}}{4}$ .      (B)  $T = \frac{9\sqrt{3}}{4}$ .      (C)  $T = \frac{9\sqrt{3}}{2}$ .      (D)  $T = -\frac{9\sqrt{3}}{2}$ .

**Câu 42.2.** Cho số phức  $z$  thỏa mãn  $|z + 1 + 2i| = 2$ . Gọi  $M, m$  lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của  $|z^2 + (2 + 2i)z - 1 + 2i|$ . Giá trị của biểu thức  $T = M^2 + m^2$  bằng

(A) 103.      (B) 101.      (C) 104.      (D) 102.

**Câu 42.3.** Giả sử  $z_1, z_2$  là hai nghiệm phức của phương trình  $|(2+i)|z|z - (1-2i)z| = |1+3i|$  và  $|z_1 - z_2| = 1$ . Tính  $M = |2z_1 + 3z_2|$ .

(A)  $M = 25$ .      (B)  $M = 5$ .      (C)  $M = \sqrt{19}$ .      (D)  $M = 19$ .

**Câu 42.4.** Biết rằng  $z$  là số phức có môđun nhỏ nhất thỏa mãn  $(z-1)(\bar{z}+2i)$  là số thực. Số phức  $z$  là

(A)  $2i$ .      (B)  $z = \frac{4}{5} + \frac{2}{5}i$ .      (C)  $z = 1 + \frac{1}{2}i$ .      (D)  $z = \frac{3}{5} + \frac{4}{5}i$ .

**Câu 42.5.** Cho số phức  $z$  thỏa mãn  $|z - 1 - 2i| = |z - 2 + i|$ . Đặt  $w = z + 2 - 3i$  tìm giá trị nhỏ nhất của  $|w|$ .

(A)  $\frac{\sqrt{30}}{2}$ .      (B)  $\frac{11}{\sqrt{10}}$ .      (C)  $\frac{2\sqrt{15}}{5}$ .      (D)  $\frac{\sqrt{10}}{3}$ .

**Câu 42.6.** Nếu  $z$  là số phức thỏa  $|\bar{z}| = |z + 2i|$  thì giá trị nhỏ nhất của  $|z - i| + |z - 4|$  là

(A) 5.      (B)  $\sqrt{3}$ .      (C) 4.      (D) 2.

**Câu 42.7.** Cho số phức  $z$  và số phức  $u = (z-i)(\bar{z}+i) + 2z - 3i$  thỏa mãn  $|u+1| - |\bar{u}-i| = 0$ . Giá trị lớn nhất của biểu thức  $T = |z - 2 + 3i|$  bằng

(A)  $3 + \sqrt{17}$ .      (B)  $\sqrt{34} - 1$ .      (C)  $1 + \sqrt{34}$ .      (D)  $2 + \sqrt{13}$ .

**Câu 42.8.** Nếu  $z$  là số phức thỏa mãn  $|\bar{z}| = |z + 2i|$  thì giá trị nhỏ nhất của  $|z - i| + |z - 4|$  là

(A) 4.      (B) 2.      (C)  $\sqrt{3}$ .      (D) 5.

**Câu 42.9.** Cho số phức  $z$  thỏa mãn  $|z - 2 - 4i| = |z - 2i|$  và biểu thức  $|iz + 2 - i|$  đạt giá trị nhỏ nhất. Tìm phần ảo của số phức  $z$ .

(A)  $\frac{5}{2}$ .      (B)  $-\frac{5}{2}$ .      (C)  $-\frac{3}{2}$ .      (D)  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ .

**Câu 42.10.** Cho các số phức  $z, w$  thỏa mãn  $|z| = \sqrt{5}$ ,  $w = (4 - 3i)z + 1 - 2i$ . Giá trị nhỏ nhất của  $|w|$  là

(A)  $4\sqrt{5}$ .      (B)  $5\sqrt{5}$ .      (C)  $6\sqrt{5}$ .      (D)  $3\sqrt{5}$ .

**Câu 42.11.** Cho số phức  $z_1, z_2$  thỏa mãn  $|z_1| = 12$  và  $|z_2 - 3 - 4i| = 5$ . Giá trị nhỏ nhất của  $|z_1 - z_2|$  là:

- (A) 17.                      (B) 0.                      (C) 2.                      (D) 7.

**Câu 42.12.** Cho hai số phức  $z_1, z_2$  thỏa mãn  $|z_1 + 5| = 5, |z_2 + 1 - 3i| = |z_2 - 3 - 6i|$ . Giá trị nhỏ nhất của  $|z_1 - z_2|$  là

- (A)  $\frac{3}{2}$ .                      (B)  $\frac{7}{2}$ .                      (C)  $\frac{1}{2}$ .                      (D)  $\frac{5}{2}$ .

**Câu 42.13.** Xét các số phức  $z$  thỏa mãn  $|z + 1 - 2i| = 2$ . Giá trị lớn nhất của  $|z + 2 - i|$  bằng

- (A)  $2 + \sqrt{2}$ .                      (B)  $\sqrt{2}$ .                      (C)  $-2 + \sqrt{2}$ .                      (D)  $2 - \sqrt{2}$ .

**Câu 42.14.** Cho  $z$  là số phức có phần thực lớn hơn 1 và thỏa mãn  $|z + 1 + i| = |2z + \bar{z} - 5 - 3i|$ , đồng thời  $|z - 2 - 2i|$  đạt giá trị nhỏ nhất. Khi đó phần thực của số phức  $z$  nói trên bằng

- (A)  $\frac{3 + \sqrt{6}}{2}$ .                      (B)  $\frac{8 + \sqrt{7}}{4}$ .                      (C)  $\frac{4 + \sqrt{6}}{2}$ .                      (D)  $\frac{8 + \sqrt{2}}{4}$ .

**Câu 42.15.** Cho số phức  $z$  thỏa mãn  $\left| \frac{z - 2i}{z + 3 - i} \right| = 1$ . Giá trị nhỏ nhất của  $|z + 3 - 2i|$  bằng

- (A)  $\frac{\sqrt{10}}{5}$ .                      (B)  $2\sqrt{10}$ .                      (C)  $\sqrt{10}$ .                      (D)  $\frac{2\sqrt{10}}{5}$ .

**Câu 42.16.** Cho số phức  $z$  thỏa mãn  $4|z + i| + 3|z - i| = 10$ . Giá trị nhỏ nhất của  $|z|$  bằng

- (A)  $\frac{1}{2}$ .                      (B)  $\frac{5}{7}$ .                      (C)  $\frac{3}{2}$ .                      (D) 1.

**Câu 42.17.** Gọi  $M$  là điểm biểu diễn số phức  $z_1 = a + (a^2 - 2a + 2)i$  (với  $a$  là số thực thay đổi) và  $N$  là điểm biểu diễn số phức  $z_2$  biết  $|z_2 - 2 - i| = |\bar{z}_2 - 6 - i|$ . Tìm độ dài ngắn nhất của đoạn  $MN$ .

- (A)  $2\sqrt{5}$ .                      (B)  $\frac{6\sqrt{5}}{5}$ .                      (C) 1.                      (D) 5.

**Câu 42.18.** Cho hai số phức  $z_1, z_2$  thỏa mãn điều kiện  $|z - 3 - 4i| = 2$  và  $|z_1 - z_2| = 1$ . Giá trị nhỏ nhất của biểu thức  $P = |z_1^2| - |z_2^2|$  bằng

- (A)  $-\sqrt{85}$ .                      (B) -10.                      (C)  $-6 - 2\sqrt{5}$ .                      (D) -5.

**Câu 42.19.** Xét các số phức  $z = a + bi$ , ( $a, b \in \mathbb{R}$ ) thỏa mãn  $4(z - \bar{z}) - 15i = i(z + \bar{z} - 1)^2$ . Tính  $F = -a + 4b$  khi  $\left| z - \frac{1}{2} + 3i \right|$  đạt giá trị nhỏ nhất.

- (A)  $F = 7$ .                      (B)  $F = 6$ .                      (C)  $F = 5$ .                      (D)  $F = 4$ .

**Câu 42.20.** Cho số phức  $z$  thỏa mãn  $|z| = 1$ . Giá trị lớn nhất của biểu thức  $P = |1 + z| + 2|1 - z|$  bằng

- (A)  $6\sqrt{5}$ .                      (B)  $2\sqrt{5}$ .                      (C)  $4\sqrt{5}$ .                      (D)  $\sqrt{5}$ .

**Câu 42.21.** Cho số phức  $z$  thỏa mãn  $|z| = 1$ . Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức  $P = |1 + z| + 3|1 - z|$ .

- (A)  $P = 6\sqrt{5}$ .                      (B)  $P = 3\sqrt{15}$ .                      (C)  $P = 2\sqrt{5}$ .                      (D)  $P = 2\sqrt{10}$ .

**Câu 42.22.** Xét các số phức  $z$  thỏa mãn  $|z| = 1$ , giá trị nhỏ nhất của biểu thức  $\left| z^4 + z + \frac{1}{2} \right|^2$  bằng

- (A)  $\frac{1}{4}$ .                      (B)  $\frac{\sqrt{2}}{8}$ .                      (C)  $\frac{1}{8}$ .                      (D)  $\frac{1}{16}$ .

**Câu 42.23.** Xét số phức  $z = a + bi$  ( $a, b \in \mathbb{R}$ ) thỏa mãn  $|2z + 2 - 3i| = 1$ . Khi biểu thức  $2|z + 2| + |z - 3|$  đạt giá trị lớn nhất, giá trị của  $a - b$  bằng

- (A) 3.                      (B) 2.                      (C) -3.                      (D) -2.

**Câu 42.24.** Cho hai số phức  $z_1, z_2$  thỏa mãn  $|z_1 - 2 + i| = 1, |z_2 - 7| = |\bar{z}_2 - 7 + 2i|$ . Biết  $\frac{z_1 - z_2}{1 + i}$  là một số thực. Tìm giá trị lớn nhất của  $T = |z_1 - z_2|$ .

- (A)  $T_{\max} = 3\sqrt{2}$ .                      (B)  $T_{\max} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ .                      (C)  $T_{\max} = \sqrt{2}$ .                      (D)  $T_{\max} = 2\sqrt{2}$ .

**Câu 42.25.** Với ai số phức  $z_1, z_2$  thỏa mãn  $z_1 + z_2 = 8 + 6i$  và  $|z_1 - z_2| = 2$ . Giá trị lớn nhất của biểu thức  $P = |z_1| + |z_2|$  là

- (A)  $5 + 3\sqrt{5}$ .                      (B)  $2\sqrt{26}$ .                      (C)  $4\sqrt{6}$ .                      (D)  $34 + 3\sqrt{2}$ .

**Câu 42.26.** Cho hai số phức  $z$  và  $w$  thay đổi nhưng thỏa mãn điều kiện  $|z| = |w|^2 - |w - 1 - i|^2 = 1$ . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức  $T = |z^2(2w - \bar{w}) - 1|$ .

- (A)  $\frac{9\sqrt{10} - 20}{20}$ .                      (B)  $\sqrt{2} - 1$ .                      (C)  $\frac{3\sqrt{10} - 5}{5}$ .                      (D)  $\frac{3\sqrt{2} - 4}{4}$ .

**Câu 42.27.** Cho số phức  $z$  thỏa mãn  $|z^2 + iz + 2| = |z^2 + z - i + 1|$ . Giá trị nhỏ nhất của  $|z - 2 + i|$  là

- (A)  $\sqrt{2}$ .                      (B) 2.                      (C)  $\sqrt{5} - \frac{1}{2}$ .                      (D)  $2\sqrt{2}$ .

**Câu 42.28.** Cho số phức  $z$  thỏa mãn  $3|z + \bar{z}| + 2|z - \bar{z}| \leq 12$ . Gọi  $M, m$  lần lượt là giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của  $|z - 4 + 3i|$ . Giá trị của  $M \cdot m$  bằng

- (A) 26.                      (B) 20.                      (C) 28.                      (D) 24.

**(D) BẢNG ĐÁP ÁN**

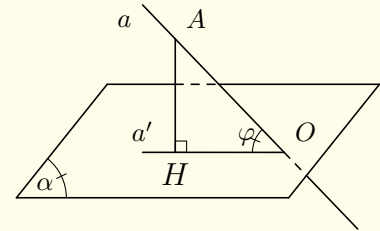
42.1. A	42.2. D	42.3. C	42.4. B	42.5. B	42.6. A	42.7. C	42.8. D
42.9. A	42.10. A	42.11. C	42.12. D	42.13. A	42.14. C	42.15. D	42.16. D
42.17. B	42.18. B	42.19. A	42.20. B	42.21. C	42.22. C	42.23. C	42.24. A
42.25. B	42.26. A	42.27. A	42.28. D				

## DẠNG 43. PHÉP ĐẾM

### A KIẾN THỨC CẦN NHỚ

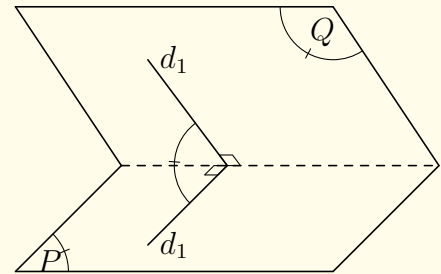
#### 1. Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng

Muốn xác định góc của đường thẳng  $a$  và  $(P)$  ta tìm hình chiếu vuông góc  $a'$  của  $a$  trên  $(P)$ . Khi đó  $(\widehat{a, (P)}) = (\widehat{a, a'})$ .



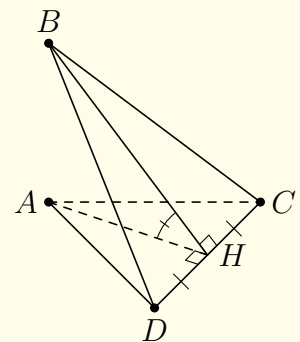
#### 2. Góc giữa hai mặt phẳng

Để tìm góc giữa hai mặt phẳng, đầu tiên tìm giao tuyến của hai mặt phẳng. Sau đó tìm hai đường thẳng lần lượt thuộc hai mặt phẳng cùng vuông góc với giao tuyến tại một điểm. Góc giữa hai mặt phẳng là góc giữa hai đường thẳng vừa tìm.

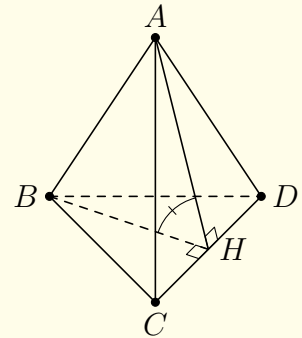


Những trường hợp đặc biệt dễ hay xảy ra:

- a) **Trường hợp 1:** Hai tam giác cân  $ACD$  và  $BCD$  có chung cạnh đáy  $CD$ , thì góc giữa hai mặt phẳng  $(ACD)$  và  $(BCD)$  là góc  $\widehat{AHB}$ .



- b) **Trường hợp 2:** Hai tam giác  $ACD$  và  $BCD$  bằng nhau có chung cạnh  $CD$ . Dựng  $AH \perp CD \Rightarrow BH \perp CD$ . Vậy góc giữa hai mặt phẳng  $(ACD)$  và  $(BCD)$  là góc  $\widehat{AHB}$ .



c) **Trường hợp 3:** Khi xác định góc giữa hai mặt phẳng khó quá, ta nên sử dụng công thức sau:

$$\sin \varphi = \frac{d(A, mp(Q))}{d(A, a)}$$

Với  $\varphi$  là góc giữa hai mặt phẳng  $(P)$  và mặt phẳng  $(Q)$ ,  $A$  là một điểm thuộc mặt phẳng  $(P)$  và  $a$  là giao tuyến của hai mặt phẳng  $(P)$  và  $(Q)$ .

d) **Trường hợp 4:** Có thể tìm góc giữa hai mặt phẳng bằng công thức  $S' = S \cdot \cos \varphi$ .

e) **Trường hợp 5:** Tìm hai đường thẳng  $d$  và  $d'$  lần lượt vuông góc với mặt phẳng  $(P)$  và mặt phẳng  $(Q)$ . Góc giữa hai mặt phẳng là góc giữa  $d$  và  $d'$ .

f) **Trường hợp 6:** Cách xác định góc giữa mặt phẳng bên và mặt phẳng đáy

(a) Bước 1: Xác định giao tuyến  $d$ .

(b) Bước 2: Từ hình chiếu vuông góc của đỉnh, dựng  $AH \perp d$ .

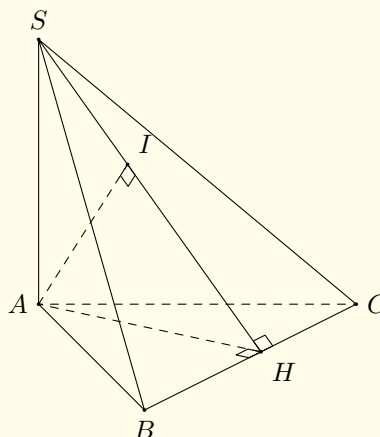
(c) Bước 3: Góc cần tìm là góc  $\widehat{SHA}$ .

Với  $S$  là đỉnh,  $A$  là hình chiếu vuông góc của đỉnh trên mặt đáy.

### 3. Khoảng cách từ một điểm đến mặt phẳng

#### Bài toán 1. Tính khoảng cách từ hình chiếu vuông góc của đỉnh đến một mặt bên

Phương pháp xác định khoảng cách từ hình chiếu của đỉnh đến một mặt phẳng bên.

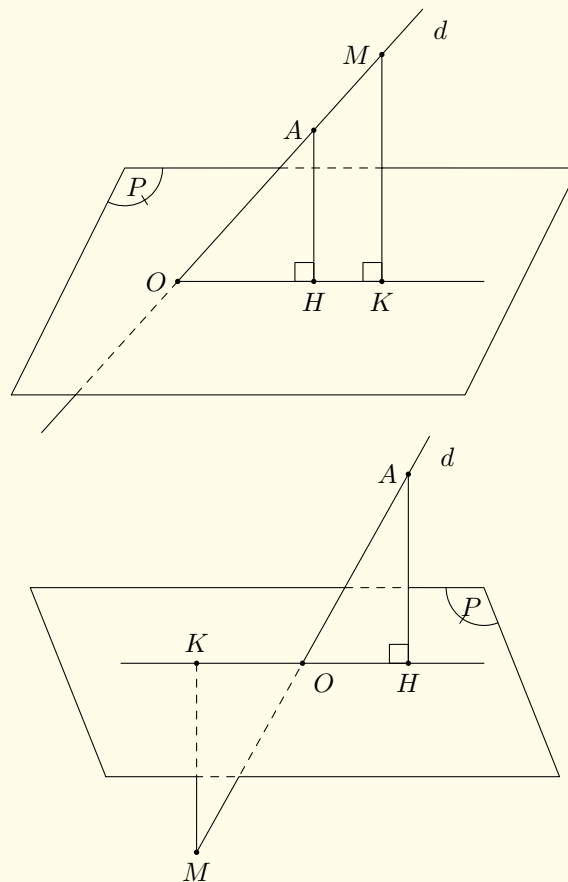


- **Bước 1.** Xác định giao tuyến  $\Delta$ .
- **Bước 2.** Từ hình chiếu vuông góc của đỉnh, dựng  $AH \perp \Delta$  (với  $H \in \Delta$ ).
- **Bước 3.** Dựng  $AI \perp SH$  (với  $I \in SH$ ). Khoảng cách cần tìm là  $AI$ .  
 Với  $S$  là đỉnh,  $A$  là hình chiếu vuông góc của đỉnh trên mặt đáy.
- **Bước 4.**  $AI = \frac{SA \cdot AH}{\sqrt{SA^2 + AH^2}}$

Ba bước dựng ở trên là sử dụng tính chất: Hai mặt phẳng vuông góc với nhau, nếu một đường thẳng nằm trên mặt phẳng này vuông góc với giao tuyến thì sẽ vuông góc với mặt phẳng kia. Đây là bài toán cơ bản nhưng vô cùng quan trọng trong việc tính khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng. Hầu như tính khoảng cách từ một điểm bất kì đến mặt phẳng bên đều thông qua điểm này dựa vào công thức của Bài toán 2.

**Bài toán 2. Tính khoảng cách từ một điểm bất kỳ đến một mặt phẳng**

Thường sử dụng công thức sau:



Công thức tính tỉ lệ khoảng cách  $\frac{d(M, mp(P))}{d(A, mp(P))} = \frac{MO}{AO}$ .

Ở công thức trên cần tính khoảng cách từ điểm  $M$  đến mặt phẳng  $(P)$ .

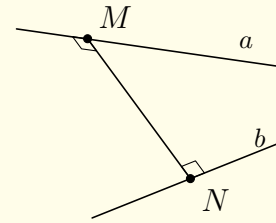


Phương pháp phải tìm một đường thẳng  $d$  qua  $M$  và chứa một điểm  $A$  mà có thể tính khoảng cách đến mặt phẳng ( $P$ ). Kinh nghiệm thường điểm  $A$  là hình chiếu của đỉnh.

**4. Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau**

Cho hai đường thẳng chéo nhau  $a$  và  $b$ . Độ dài đoạn vuông góc chung  $MN$  của  $a$  và  $b$  được gọi là khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau  $a$  và  $b$ .

Kí hiệu:  $d(a, b) = MN$  khi  $\begin{cases} MN \perp a \text{ tại } M \\ MN \perp b \text{ tại } N. \end{cases}$



**5. Thể tích khối chóp-khối lăng trụ**

- a) Thể tích của khối chóp có diện tích đáy  $S$  và chiều cao  $h$  là  $V = \frac{1}{3} \cdot S \cdot h$ .
- b) Công thức tính thể tích khối lăng trụ  $V = S \cdot h$ , trong đó  $S$  là diện tích đáy,  $h$  là chiều cao.
- c) Tính diện tích đáy  $S$  ta cần nhớ các công thức tính diện tích của tam giác và tứ giác thường gặp.
- d) Tính chiều cao  $h$  ta phải xác định được hình chiếu của đỉnh hình chóp ( hay lăng trụ) trên mặt phẳng đáy.

**B BÀI TẬP MẪU**

**CÂU 43 (ĐỀ minh họa BGD 2022-2023).**

Cho khối lăng trụ đứng  $ABC.A'B'C'$  có đáy  $ABC$  là tam giác vuông cân tại  $B$ ,  $AB = a$ . Biết khoảng cách từ  $A$  đến mặt phẳng ( $A'BC$ ) bằng  $\frac{\sqrt{6}}{3}a$ , thể tích khối lăng trụ đã cho bằng

- A  $\frac{\sqrt{2}}{6}a^3$ .     
  B  $\frac{\sqrt{2}}{2}a^3$ .     
  C  $\sqrt{2}a^3$ .     
  D  $\frac{\sqrt{2}}{4}a^3$ .

**C BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ PHÁT TRIỂN**

**Câu 43.1.** Cho hình chóp  $S.ABC$  có đáy  $ABC$  là tam giác vuông cân đỉnh  $A$ ,  $AB = a\sqrt{2}$ . Gọi  $I$  là trung điểm của  $BC$  hình chiếu vuông góc của đỉnh  $S$  lên mặt phẳng ( $ABC$ ) là điểm  $H$  thỏa mãn  $\vec{IA} = -2\vec{IH}$  góc giữa  $SC$  và mặt phẳng ( $ABC$ ) bằng  $60^\circ$ . Thể tích khối chóp bằng

- A  $\frac{a^3\sqrt{5}}{2}$ .     
  B  $\frac{a^3\sqrt{5}}{6}$ .     
  C  $\frac{a^3\sqrt{15}}{6}$ .     
  D  $\frac{a^3\sqrt{15}}{12}$ .

**Câu 43.2.** Cho khối chóp  $S.ABCD$  có đáy  $AB5CD$  là hình chữ nhật,  $AB = a$ ,  $SA$  vuông góc với mặt phẳng đáy và  $SA = a$ . Góc giữa hai mặt phẳng ( $SBC$ ) và ( $SCD$ ) bằng  $\phi$ , với  $\cos \phi = \frac{1}{\sqrt{3}}$ . Thể tích của khối chóp đã cho bằng

(A)  $\frac{a^3\sqrt{2}}{3}$ .     
  (B)  $a^3\sqrt{2}$ .     
  (C)  $\frac{2\sqrt{2}a^3}{3}$ .     
  (D)  $\frac{2a^3}{3}$ .

**Câu 43.3.** Cho hình chóp tứ giác đều  $S.ABCD$ ,  $O$  là giao điểm của  $AC$  và  $BD$ . Biết mặt bên của hình chóp là tam giác đều và khoảng cách từ  $O$  đến mặt bên là  $2a$ . Tính thể tích khối chóp  $S.ABCD$  theo  $a$ .

(A)  $16a^3\sqrt{3}$ .     
  (B)  $8a^3\sqrt{3}$ .     
  (C)  $48a^3\sqrt{3}$ .     
  (D)  $24a^3\sqrt{3}$ .

**Câu 43.4.** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy là hình chữ nhật với  $AB = a$ ,  $AD = 2a$ , cạnh bên  $SA$  vuông góc với đáy. Khoảng cách từ điểm  $A$  đến mặt phẳng  $(SBD)$  bằng  $\frac{2a}{3}$ . Tính thể tích khối chóp  $S.ABCD$ .

(A)  $\frac{2a^3}{3}$ .     
  (B)  $\frac{a^3}{3}$ .     
  (C)  $\frac{2a^3}{9}$ .     
  (D)  $2a^3$ .

**Câu 43.5.** Cho hình chóp  $S.ABC$  có  $SA \perp (ABC)$ , tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$ ,  $BC = 3a$ ,  $AB = a$ . Góc giữa mặt phẳng  $(SBC)$  và  $(ABC)$  bằng  $45^\circ$ . Tính thể tích khối chóp  $S.ABC$  theo  $a$ .

(A)  $V_{S.ABC} = \frac{4a^3}{9}$ .     
  (B)  $V_{S.ABC} = \frac{a^3\sqrt{2}}{6}$ .     
  (C)  $V_{S.ABC} = \frac{a^3\sqrt{2}}{2}$ .     
  (D)  $V_{S.ABC} = \frac{2a^3}{9}$ .

**Câu 43.6.** Cho khối chóp đều  $S.ABCD$  có cạnh đáy là  $a$ , các mặt bên tạo với đáy một góc  $60^\circ$ . Tính thể tích khối chóp đó.

(A)  $\frac{a^3\sqrt{3}}{2}$ .     
  (B)  $\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$ .     
  (C)  $\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$ .     
  (D)  $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$ .

**Câu 43.7.** Cho lăng trụ đều  $ABC.A'B'C'$  có cạnh đáy bằng  $2a$ , đường thẳng  $AB'$  tạo với mặt phẳng  $(BCC'B')$  một góc  $30^\circ$ . Thể tích khối lăng trụ đã cho bằng

(A)  $2\sqrt{6}a^3$ .     
  (B)  $6a^3$ .     
  (C)  $2a^3$ .     
  (D)  $\sqrt{6}a^3$ .

**Câu 43.8.** Cho hình hộp chữ nhật  $ABCD.A'B'C'D'$  có  $AB = a$ ,  $AD = 3a$ , góc giữa hai mặt phẳng  $(ABC')$  và  $(ABCD)$  bằng  $60^\circ$ . Thể tích khối lăng trụ  $ABCD.A'B'C'D'$  bằng

(A)  $\frac{3\sqrt{3}a^3}{3}$ .     
  (B)  $3\sqrt{3}a^3$ .     
  (C)  $\frac{9\sqrt{3}a^3}{2}$ .     
  (D)  $9\sqrt{3}a^3$ .

**Câu 43.9.** Cho hình lăng trụ  $ABC.A'B'C'$  có  $AB = 3a$ ,  $AC = 4a$ ,  $\widehat{A'BA} = \widehat{C'A'C'} = 90^\circ$ . Biết khoảng cách từ tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp  $A'.ABC$  đến mặt phẳng  $(ABC)$  bằng  $\frac{5\sqrt{3}}{2}$ , góc giữa  $AA'$  và  $(A'B'C')$  bằng  $60^\circ$ . Tính thể tích lăng trụ  $ABC.A'B'C'$

(A)  $30\sqrt{3}a^3$ .     
  (B)  $10\sqrt{3}a^3$ .     
  (C)  $5\sqrt{3}a^3$ .     
  (D)  $15\sqrt{3}a^3$ .

**Câu 43.10.** Cho hình lăng trụ  $ABC.A'B'C'$  có đáy  $ABC$  là tam giác vuông tại  $A$ ,  $AB = a$ ,  $AC = a\sqrt{3}$ . Hình chiếu vuông góc của đỉnh  $A'$  lên  $(ABC)$  trùng với tâm của đường tròn ngoại tiếp của tam giác  $ABC$ . Trên cạnh  $AC$  lấy điểm  $M$  sao cho  $CM = 2AM$ . Biết khoảng cách giữa hai đường thẳng  $A'M$  và  $BC$  bằng  $\frac{a}{2}$ . Tính thể tích  $V$  của khối lăng trụ đã cho.

(A)  $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{2}$ .     
  (B)  $a^3$ .     
  (C)  $\frac{3a^3}{2}$ .     
  (D)  $\frac{2a^3\sqrt{3}}{3}$ .

**Câu 43.11.** Cho lăng trụ  $ABC.A'B'C'$  có đáy là tam giác đều cạnh  $2a$ . Hình chiếu vuông góc của điểm  $A'$  lên mặt phẳng  $(ABC)$  trùng với trọng tâm tam giác  $ABC$ . Biết thể tích của khối lăng trụ là  $2a^3\sqrt{3}$ . Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng  $AA'$  và  $BC$ .

- (A)  $\frac{4a}{3}$ .                      (B)  $\frac{8a}{3}$ .                      (C)  $\frac{3a}{2}$ .                      (D)  $3a$ .

**Câu 43.12.** Cho hình chóp tứ giác  $S.ABCD$  có đáy là hình thoi,  $\widehat{BAD} = 60^\circ$ , cạnh đáy bằng  $a$ , thể tích bằng  $\frac{a^3\sqrt{2}}{4}$ . Biết hình chiếu của đỉnh  $S$  lên mặt phẳng đáy trùng với giao điểm hai đường chéo của hình thoi (tham khảo hình vẽ). Khoảng cách từ  $C$  đến mặt phẳng  $(SAB)$  bằng

- (A)  $\frac{a}{4}$ .                      (B)  $\frac{a\sqrt{6}}{3}$ .                      (C)  $\frac{a}{3}$ .                      (D)  $\frac{a\sqrt{6}}{2}$ .

**Câu 43.13.** Cho tứ diện  $ABCD$  có  $AC = AD = a\sqrt{2}$ ,  $BC = BD = a$ , khoảng cách từ điểm  $B$  đến mặt phẳng  $(ACD)$  bằng  $\frac{a\sqrt{3}}{2}$  và thể tích tứ diện  $ABCD$  bằng  $\frac{a^3\sqrt{15}}{27}$ . Góc giữa hai mặt phẳng  $(ACD)$  và  $(BCD)$  bằng

- (A)  $90^\circ$ .                      (B)  $45^\circ$ .                      (C)  $60^\circ$ .                      (D)  $30^\circ$ .

**Câu 43.14.** Cho hình chóp tứ giác đều  $S.ABCD$  có chu vi tam giác  $SAC$  bằng 8. Trong trường hợp thể tích của khối chóp lớn nhất, hãy tính cosin của góc tạo bởi cạnh bên và mặt đáy của hình chóp  $S.ABCD$ .

- (A)  $\frac{2}{3}$ .                      (B)  $\frac{1}{3}$ .                      (C)  $\frac{3}{4}$ .                      (D)  $\frac{1}{4}$ .

**Câu 43.15.** Cho lăng trụ đứng  $ABC.A'B'C'$  có đáy là tam giác đều cạnh  $2a$ . Mặt phẳng  $(aB'C')$  tạo với mặt đáy góc  $30^\circ$ . Tính theo  $a$  thể tích khối lăng trụ  $ABC.A'B'C'$ .

- (A)  $V = a^3\sqrt{3}$ .                      (B)  $V = \frac{3a^3\sqrt{3}}{4}$ .                      (C)  $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{8}$ .                      (D)  $V = \frac{3a^3\sqrt{3}}{8}$ .

**Câu 43.16.** Cho hình lăng trụ đứng  $ABC.A'B'C'$ , biết đáy  $ABC$  là tam giác đều cạnh  $a$ . Khoảng cách từ tâm  $O$  của tam giác  $ABC$  đến mặt phẳng  $(A'BC)$  bằng  $\frac{a}{6}$ . Tính thể tích khối lăng trụ  $ABC.A'B'C'$ .

- (A)  $\frac{3a^3\sqrt{2}}{28}$ .                      (B)  $\frac{3a^3\sqrt{2}}{4}$ .                      (C)  $\frac{3a^3\sqrt{2}}{16}$ .                      (D)  $\frac{3a^3\sqrt{2}}{8}$ .

**Câu 43.17.** Cho lăng trụ đứng  $ABC.A'B'C'$  có đáy  $ABC$  là tam giác vuông tại  $A$ ,  $AB = 2a$ ,  $AC = 3a$ . Mặt phẳng  $(A'BC)$  hợp với mặt phẳng  $(A'B'C')$  một góc  $60^\circ$ . Tính thể tích khối lăng trụ đã cho.

- (A)  $\frac{9a^3\sqrt{39}}{26}$ .                      (B)  $\frac{3a^3\sqrt{39}}{26}$ .                      (C)  $\frac{6a^3\sqrt{39}}{13}$ .                      (D)  $\frac{18a^3\sqrt{39}}{13}$ .

**Câu 43.18.** Cho hình lăng trụ đứng  $ABC.A'B'C'$  có đáy  $ABC$  là tam giác vuông tại  $A$ .  $AC = a$ ,  $\widehat{ACB} = 60^\circ$ . Đường thẳng  $BC'$  tạo với mặt phẳng  $(ACC'A')$  một góc  $30^\circ$ . Thể tích của khối lăng trụ  $ABC.A'B'C'$  bằng

- (A)  $a^3\sqrt{6}$ .                      (B)  $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$ .                      (C)  $\frac{a^3\sqrt{6}}{3}$ .                      (D)  $a^3\sqrt{3}$ .

**Câu 43.19.** Hình lăng trụ đứng  $ABC.A'B'C'$  có diện tích đáy bằng 4, diện tích ba mặt bên lần lượt là 9, 18 và 10. Thể tích khối lăng trụ  $ABC.A'B'C'$  bằng

- (A)  $\sqrt{11951}$ .      (B)  $\frac{\sqrt{11951}}{2}$ .      (C)  $\sqrt[4]{11951}$ .      (D)  $\frac{\sqrt[4]{11951}}{2}$ .

**Câu 43.20.** Cho lăng trụ đứng  $ABCD.A'B'C'D'$  có đáy là hình thang vuông tại  $A$  và  $B$ , gọi  $E$  là trung điểm  $AD$ . Cho  $AD = 2AB = 2BC = 2a$ . Hãy tính theo  $a$  thể tích khối lăng trụ  $ABCD.A'B'C'D'$  biết khoảng cách giữa hai đường thẳng  $BE$  và  $A'D$  là  $\frac{3\sqrt{22}}{22}a$ .

- (A)  $9a^3$ .      (B)  $\frac{9\sqrt{22}}{11}a^3$ .      (C)  $\frac{9}{2}a^3$ .      (D)  $\frac{9\sqrt{22}}{22}a^3$ .

**(D) BẢNG ĐÁP ÁN**

43.1. C	43.2. A	43.3. A	43.4. A	43.5. A	43.6. C	43.7. A	43.8. C
43.9. A	43.10. A	43.11. C	43.12. B	43.13. B	43.14. A	43.15. A	43.16. C
43.17. D	43.18. A	43.19. B	43.20. C				

## DẠNG 44. DIỆN TÍCH HÌNH PHẪNG

### A KIẾN THỨC CẦN NHỚ

#### 1. Ứng dụng tích phân tính diện tích

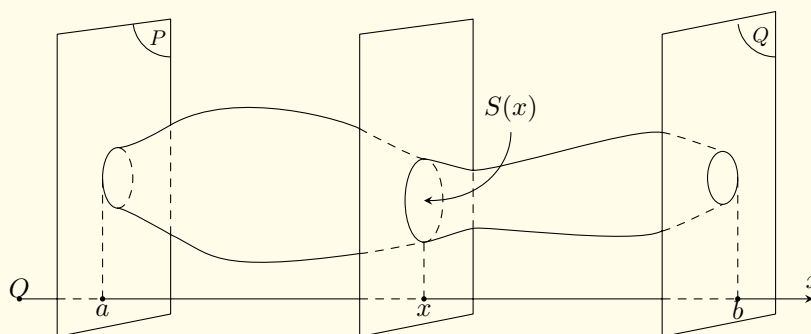
a) Một số hình thức đề cho và hướng xử lý trong trắc nghiệm

- Hình thức 1: Không cho hình vẽ, cho dạng (H) :  $\{y = f(x), y = g(x), x = a, x = b (a < b)\} \xrightarrow{\text{casio}} \int_a^b |f(x) - g(x)| dx = \text{kết quả, so sánh với bốn đáp án.}$
- Hình thức 2: Không cho hình vẽ, cho dạng (H) :  $\{y = f(x), y = g(x)\}$ . Giải  $f(x) = g(x) \Rightarrow x_1, \dots, x_i$  với  $x_1$  nhỏ nhất,  $x_i$  lớn nhất  $\xrightarrow{\text{casio}} \int_{x_1}^{x_i} |f(x) - g(x)| dx$
- Hình thức 3: Cho hình vẽ, sẽ giải phương trình tìm tọa độ giao điểm ( nếu chưa cho trên hình), chia từng diện tích nhỏ, xỏ hình từ trên xuống, ghi công thức và bấm máy tính.
- Hình thức 4: Cho ba hàm trở lên, chẳng hạn  $y = f(x), y = g(x), y = h(x)$  ta nên vẽ hình.

#### 2. Ứng dụng tính thể tích khối tròn xoay

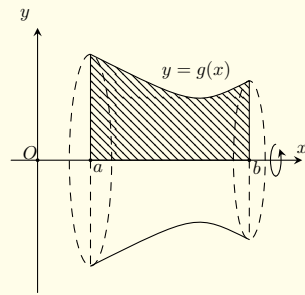
a) Thể tích vật thể (mặt cắt)

Gọi  $B$  là phần vật thể giới hạn bởi hai mặt phẳng vuông góc với trục  $Ox$  tại các điểm  $a$  và  $b$ ,  $S(x)$  là diện tích thiết diện của vật thể bị cắt bởi mặt phẳng vuông góc với trục  $Ox$  tại điểm  $x$ , ( $a \leq x \leq b$ ). Giả sử  $S(x)$  là hàm số liên tục trên đoạn  $[a; b]$ . Khi đó  $S = \int_a^b S(x) dx$ .



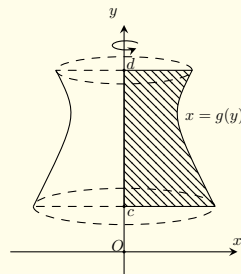
b) Thể tích khối tròn xoay

- Thể tích khối tròn xoay được sinh ra khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường  $y = f(x)$ , trục hoành và hai đường thẳng  $x = a, x = b$  quanh trục  $Ox$ :



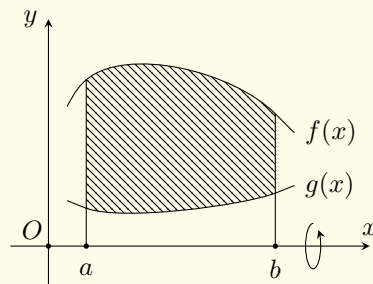
$$\begin{cases} (C): y = f(x) \\ (Ox): y = 0 \\ x = a \\ x = b \end{cases} \quad V_x = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx$$

- Thể tích khối tròn xoay được sinh ra khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường  $x = g(y)$ , trục tung và hai đường thẳng  $y = c, y = d$  quanh trục  $Ox$ :



$$\begin{cases} (C): x = g(y) \\ (Oy): x = 0 \\ y = c \\ y = d \end{cases} \quad V_y = \pi \int_c^d [g(y)]^2 dy$$

- Thể tích khối tròn xoay được sinh ra khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường  $y = f(x), y = g(x)$  (cùng nằm một phía so với  $Ox$ ) và hai đường thẳng  $x = a, x = b$  quanh trục  $Ox$ :



$$V = \pi \int_a^b |f^2(x) - g^2(x)| dx$$

## B BÀI TẬP MẪU

### CÂU 44 (Đề minh họa BGD 2022-2023).

Cho hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm liên tục trên  $\mathbb{R}$  và thỏa mãn  $f(x) + xf'(x) = 4x^3 + 4x + 2, \forall x \in \mathbb{R}$ . Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường  $y = f(x)$  và  $y = f'(x)$  bằng

(A)  $\frac{5}{2}$ .

(B)  $\frac{4}{3}$ .

(C)  $\frac{1}{2}$ .

(D)  $\frac{1}{4}$ .

## 🕒 BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ PHÁT TRIỂN

**Câu 44.1.** Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  và thỏa mãn  $f(\sin x - x) = \frac{\cos 2x}{\cos x - 1}$ . Tính tích phân  $S = \int_{-\pi}^0 f(x) dx$ .

- (A) 0.                      (B) 1.                      (C) 2.                      (D) 3.

**Câu 44.2.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm và liên tục trên  $[0; \frac{\pi}{2}]$  thỏa mãn  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} [f'(x)]^2 dx = \frac{\pi}{4}$ ;  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x f(x) dx = \frac{\pi}{4}$ ;  $f(\frac{\pi}{2}) = 0$ . Tính  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx$ .

- (A) 0.                      (B) 1.                      (C)  $\frac{\pi}{2}$ .                      (D)  $-\frac{\pi}{2}$ .

**Câu 44.3.** Cho hàm số  $y = f(x)$  thỏa mãn các điều kiện  $f(1) = 2$ ,  $f(x) \neq 0, \forall x > 0$  và  $(x^2 + 1)^2 f'(x) = [f(x)]^2 (x^2 - 1)$  với mọi  $x > 0$ . Giá trị của  $f(2)$  bằng

- (A)  $\frac{2}{5}$ .                      (B)  $-\frac{2}{5}$ .                      (C)  $-\frac{5}{2}$ .                      (D)  $\frac{5}{2}$ .

**Câu 44.4.** Cho hàm số  $y = f(x)$  thỏa mãn  $[f'(x)]^2 + f(x) \cdot f''(x) = 4x^3 + 2x$  với mọi  $x \in \mathbb{R}$  và  $f(0) = 0$ . Giá trị của  $f^2(1)$  bằng

- (A)  $\frac{5}{2}$ .                      (B)  $\frac{9}{2}$ .                      (C)  $\frac{16}{15}$ .                      (D)  $\frac{8}{15}$ .

**Câu 44.5.** Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên  $[0; 1]$ ,  $f(x)$  và  $f'(x)$  nhận giá trị dương trên  $[0; 1]$  và thỏa mãn  $f(0) = 2, \int_0^1 [f'(x)f^2(x) + 1] dx = 2 \int_0^1 \sqrt{f'(x)} f(x) dx$ . Tính tích phân

$$I = \int_0^1 [f(x)]^3 dx.$$

- (A)  $I = \frac{15}{4}$ .                      (B)  $I = \frac{15}{2}$ .                      (C)  $I = \frac{17}{2}$ .                      (D)  $\frac{19}{2}$ .

**Câu 44.6.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm không âm trên  $[0; 1]$ , thỏa mãn  $f(x) > 0$  với mọi  $x \in [0; 1]$  và  $[f(x)]^4 \cdot [f'(x)]^2 \cdot (x^2 + 1) = 1 + [f(x)]^3$ . Biết  $f(0) = 2$ , hãy chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau.

- (A)  $\frac{3}{2} < f(1) < 2$ .                      (B)  $\frac{5}{2} < f(1) < 3$ .                      (C)  $2 < f(1) < \frac{5}{2}$ .                      (D)  $3 < f(1) < \frac{7}{2}$ .

**Câu 44.7.** Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên  $(0; +\infty)$ , thỏa mãn  $f(x) = e^x + \int_0^1 \frac{f(t)}{e^t} dt$  với mọi  $x \in (0; +\infty)$ . Biết  $f(1 + \ln 2023) = a + b \cdot e$ , với  $a, b \in \mathbb{N}$ . Khi đó  $a + b$  có giá trị là

- (A) 2023.                      (B) 2025.                      (C) 2024.                      (D) 2026.

**Câu 44.8.** Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên  $(0; +\infty)$ , thỏa mãn  $f(x^2 + 1) + \frac{f(\sqrt{x})}{4x\sqrt{x}} = \frac{2x + 1}{2x} \cdot \ln(x + 1)$  với mọi  $x \in (0; +\infty)$ . Biết  $\int_1^{17} f(x) dx = a \ln 5 - 2 \ln b + c$  với  $a, b, c \in \mathbb{Q}$ . Giá trị  $a + b + 2c$  bằng

- (A) 7.                      (B)  $\frac{29}{2}$ .                      (C) 5.                      (D)  $\frac{19}{2}$ .

**Câu 44.9.** Cho hàm số  $y = f(x)$  nghịch biến và có đạo hàm liên tục trên khoảng  $(0; +\infty)$ , thoả mãn  $f(9) = 9$  và  $[f(x) + xf'(x)]^2 = 4f(x), \forall x \in (0; +\infty)$ . Nguyên hàm của hàm số  $f(x)$  là

- (A)  $4x + 24\sqrt{x} - 9 \ln x + C$ .                      (B)  $2x + 12\sqrt{x} - 9 \ln |x| + C$ .  
 (C)  $x + 12\sqrt{x} + 9 \ln |x| + C$ .                      (D)  $4 + \frac{12}{\sqrt{x}} + \frac{9}{x} + C$ .

**Câu 44.10.** Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  thoả mãn  $f(1) = -\frac{1}{2}$  và  $f'(x) = 2x[f(x)]^2, \forall x \in \mathbb{R}$ . Khi đó  $f'(x)$  bằng

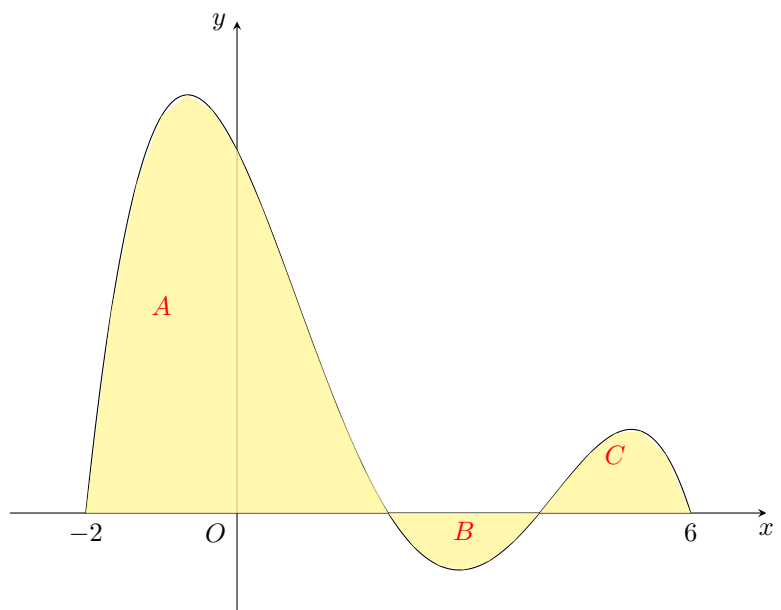
- (A)  $f'(x) = -\frac{2x}{x^2 + 1}$ .      (B)  $f'(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$ .      (C)  $f'(x) = \frac{2x}{(x^2 + 1)^2}$ .      (D)  $f'(x) = \frac{2}{(x^2 + 1)^2}$ .

**Câu 44.11.**

Cho hàm số  $y = f(x)$  có đồ thị trên  $[-2; 6]$  như hình vẽ. Biết các miền A, B, C có diện tích lần lượt là 32; 2; 3.

Tính  $\int_{-2}^2 [f(2x + 2) + 1] dx$

- (A)  $\frac{45}{2}$ .                      (B) 41.  
 (C) 37.                      (D)  $\frac{41}{2}$ .

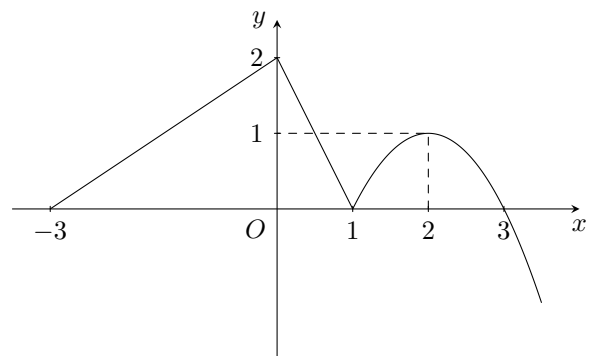


**Câu 44.12.**

Cho hàm số  $f(x)$ . Đồ thị của hàm số  $y = f'(x)$  trên  $[-3; 3]$  như hình vẽ (phần đường cong của đồ thị là một phần của parabol  $y = ax^2 + bx + c$ ).

Biết  $f(3) = 0$ , giá trị của  $f(-1) + f(1)$  bằng

- (A)  $-\frac{16}{3}$ .      (B)  $-\frac{8}{3}$ .      (C)  $\frac{16}{3}$ .      (D)  $\frac{8}{3}$ .

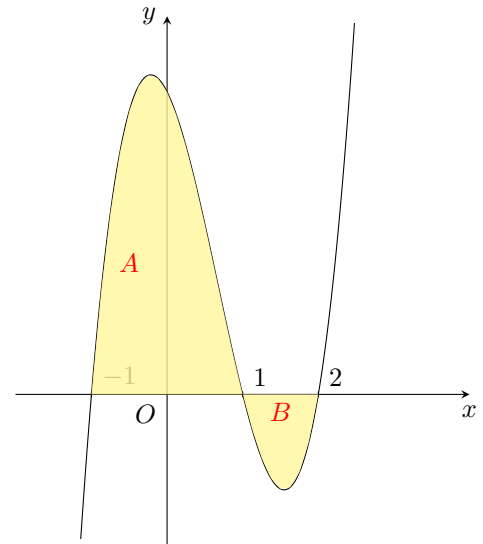


**Câu 44.13.**



Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  và có đồ thị như hình vẽ. Biết rằng diện tích các hình phẳng (A) và (B) lần lượt bằng 15 và 3. Tích phân  $\int_{\frac{1}{e}}^1 \frac{1}{x} f(3 \ln x + 2) dx$  bằng

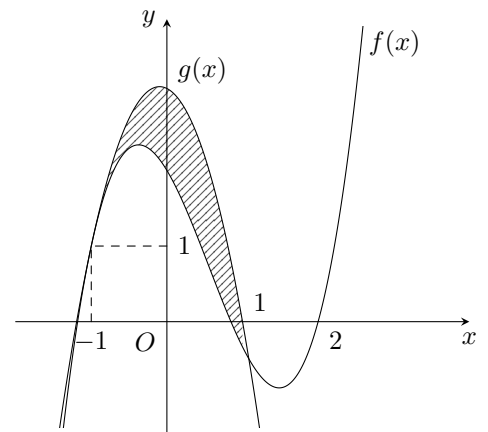
- (A) 4.      (B) -4.      (C) 6.      (D) -6.



**Câu 44.14.**

Cho hàm số bậc ba  $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + 2$  và parabol  $g(x) = mx^2 + nx + p$  có đồ thị như hình vẽ bên. Biết hai đồ thị tiếp xúc nhau tại điểm có hoành độ bằng -1. Diện tích phần hình phẳng phần được gạch chéo nằm trong khoảng

- (A) (1,588; 1,592).      (B) (1,551; 1,574).  
 (C) (1,542; 1,551).      (D) (1,574; 1,588).



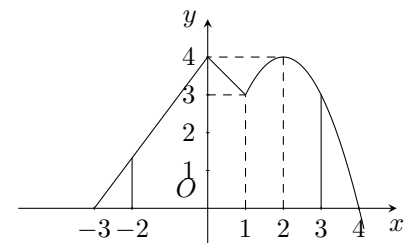
**Câu 44.15.** Cho hàm số  $f(x)$  có đạo hàm  $f'(x) = (x - 1)(x^2 - 3)(x^4 - 1)$  với mọi  $x \in \mathbb{R}$ . So sánh  $f(-2)$ ;  $f(0)$ ;  $f(2)$  ta được

- (A)  $f(2) < f(0) < f(-2)$ .      (B)  $f(0) < f(-2) < f(2)$ .  
 (C)  $f(-2) < f(2) < f(0)$ .      (D)  $f(-2) < f(0) < f(2)$ .

**Câu 44.16.**

Cho hàm số  $y = f(x)$  có đồ thị như hình vẽ dưới đây (phần cong của đồ thị là một phần của parabol  $y = ax^2 + bx + c$ ). Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị  $y = f(x)$ ,  $y = 0$ ,  $x = -2$ ,  $x = 3$ .

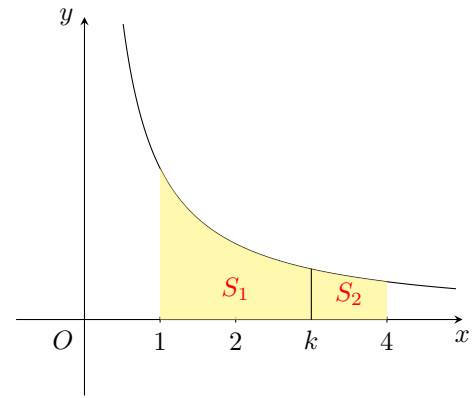
- (A)  $S = \frac{43}{2}$ .      (B)  $S = \frac{95}{6}$ .      (C)  $S = \frac{97}{6}$ .      (D)  $S = \frac{53}{3}$ .



**Câu 44.17.**

Cho hình cong ( $H$ ) giới hạn bởi các đường  $y = \frac{2}{x}$ ,  $x = 1$ ,  $x = 4$  và trục hoành. Đường thẳng  $x = k$  ( $1 < k < 4$ ) chia ( $H$ ) thành hai phần có diện tích là  $S_1$  và  $S_2$  như hình vẽ bên, biết  $S_1 = 3S_2$ . Giá trị của  $k$  là?

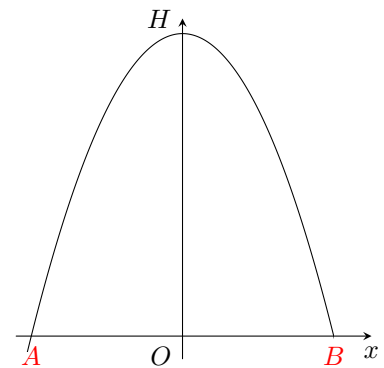
- (A)  $\sqrt{8}$ .      (B)  $\sqrt{6}$ .      (C)  $\sqrt{7}$ .      (D)  $\sqrt{5}$ .



**Câu 44.18.**

Bạn An cần mua một chiếc gương có đường viền là đường Parabol bậc 2 (xem hình vẽ). Biết rằng khoảng cách đoạn  $AB = 60$  cm,  $OH = 30$  cm. Diện tích của chiếc gương bạn An mua là

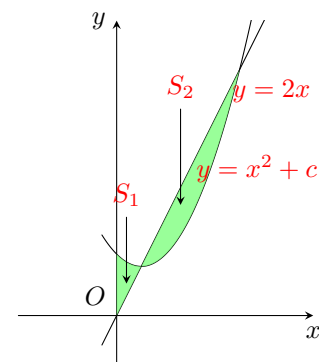
- (A)  $900$  ( $\text{cm}^2$ ).      (B)  $1000$  ( $\text{cm}^2$ ).  
 (C)  $1400$  ( $\text{cm}^2$ ).      (D)  $1200$  ( $\text{cm}^2$ ).



**Câu 44.19.**

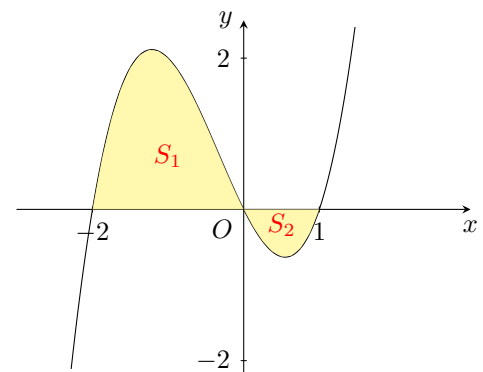
Cho đường thẳng  $y = 2x$  và parabol  $y = x^2 + c$  ( $c$  là tham số thực dương). Gọi  $S_1$  và  $S_2$  lần lượt là diện tích của hai hình phẳng được gạch chéo trong hình vẽ. Khi  $S_1 = S_2$  thì  $c$  gần với số nào nhất sau đây?

- (A) 2.      (B) 0.      (C) 1.      (D) 3.



**Câu 44.20.**

Hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số  $y = f(x)$  và trục hoành gồm hai phần, phần nằm phía trên trục hoành có diện tích  $S_1 = \frac{8}{3}$  và phần nằm phía dưới trục hoành có diện tích  $S_2 = \frac{5}{12}$  (tham khảo hình vẽ bên). Tính  $I = \int_{-1}^0 f(3x + 1) dx$ .



(A)  $I = \frac{27}{4}$ .

(B)  $I = \frac{5}{3}$ .

(C)  $I = \frac{3}{4}$ .

(D)  $I = \frac{37}{36}$ .

**D BẢNG ĐÁP ÁN**

44.1. A	44.2. B	44.3. D	44.4. C	44.5. D	44.6. B	44.7. C	44.8. A
44.9. A	44.10. C	44.11. D	44.12. A	44.13. A	44.14. C	44.15. A	44.16. C
44.17. A	44.18. D	44.19. C	44.20. C				

## DẠNG 45. PHƯƠNG TRÌNH VỚI HỆ SỐ PHỨC

### A KIẾN THỨC CẦN NHỚ

#### 1. Cách giải

- Xét phương trình bậc hai  $az^2 + bz + c = 0$ , với  $z \in \mathbb{C}$ ;  $a, b, c \in \mathbb{R}$  và  $a \neq 0$ .

Xét biệt thức  $\Delta = b^2 - 4ac$ .

– Nếu  $\Delta \neq 0$  thì phương trình có hai nghiệm phân biệt  $z_1 = \frac{-b + \delta}{2a}$  và  $z_2 = \frac{-b - \delta}{2a}$ , trong đó  $\delta$  là một căn bậc hai của  $\Delta$ .

– Nếu  $\Delta = 0$  thì phương trình có nghiệm kép  $z_1 = z_2 = -\frac{b}{2a}$ .

#### 2. Đặc biệt

- Khi  $\Delta$  là số thực dương thì phương trình có hai nghiệm  $z_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$  và  $z_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ .

- Khi  $\Delta$  là số thực âm thì phương trình có hai nghiệm  $z_1 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}$  và  $z_2 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ .

#### 3. Nhận xét

- Trên tập hợp số phức, mọi phương trình bậc 2 đều có 2 nghiệm (không nhất thiết phân biệt).
- Định lý Vi-et: Phương trình bậc hai  $az^2 + bz + c$ , với  $z \in \mathbb{C}$ ;  $a, b, c \in \mathbb{R}$  và  $a \neq 0$  có 2 nghiệm phức  $z_1$  và  $z_2$  thì:

$$\begin{cases} z_1 + z_2 = -\frac{b}{a} \\ z_1 z_2 = \frac{c}{a} \end{cases}$$

### B BÀI TẬP MẪU

**CÂU 45.** Trên tập hợp số phức, xét phương trình  $z^2 - 2(m + 1)z + m^2 = 0$  ( $m$  là tham số thực). Có bao nhiêu giá trị của  $m$  để phương trình đó có hai nghiệm phân biệt  $z_1, z_2$  thỏa mãn  $|z_1| + |z_2| = 2$  ?

(A) 1.

(B) 4.

(C) 2.

(D) 3.

## **C** BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ PHÁT TRIỂN

**Câu 45.1.** Gọi  $z_1, z_2$  là các nghiệm phức của phương trình  $z^2 + 4z + 5 = 0$ . Đặt  $w = (1 + z_1)^{100} + (1 + z_2)^{100}$ . Khi đó

- (A)  $w = -2^{51}i$ .      (B)  $w = 2^{51}i$ .      (C)  $w = 2^{51}$ .      (D)  $w = -2^{51}$ .

**Câu 45.2.** Gọi  $z_1, z_2$  là hai nghiệm phức của phương trình  $z^2 + z + 1 = 0$ . Giá trị của  $P = |z_1^{2019} + z_2^{2019}|$  là

- (A)  $P = 2$ .      (B)  $P = 3$ .      (C)  $P = 2\sqrt{3}$ .      (D)  $P = 4038$ .

**Câu 45.3.** Có bao nhiêu số nguyên  $a$  để phương trình  $z^2 - (a - 3)z + a^2 + a = 0$  có hai nghiệm phức  $z_1, z_2$  thỏa mãn  $|z_1 + z_2| = |z_1 - z_2|$  ?

- (A) 3.      (B) 1.      (C) 4.      (D) 2.

**Câu 45.4.** Gọi  $z$  là một nghiệm của phương trình  $z^2 - z + 1 = 0$ . Giá trị của biểu thức  $M = z^{2019} + z^{2018} + \frac{1}{z^{2019}} + \frac{1}{z^{2018}} + 5$  bằng

- (A) 5.      (B) 2.      (C) 7.      (D) -1.

**Câu 45.5.** Gọi  $z_1, z_2$  là các nghiệm phức của phương trình  $z^2 - 4z + 5 = 0$ . Giá trị của  $(z_1 - 1)^{2018} + (z_2 - 1)^{2018}$  bằng

- (A)  $2^{1009}i$ .      (B) 0.      (C)  $2^{2018}$ .      (D)  $-2^{1010}i$ .

**Câu 45.6.** Gọi  $z_1, z_2$  là hai nghiệm phức của phương trình  $z^2 + 4z + 5 = 0$ , trong đó  $z_2$  là nghiệm phức có phần ảo dương. Môđun của số phức  $w = z_1 - 2z_2$  bằng

- (A)  $\sqrt{5}$ .      (B) 3.      (C) 2.      (D)  $\sqrt{13}$ .

**Câu 45.7.** Gọi  $S$  là tổng tất cả các số thực  $m$  để phương trình  $z^2 - 2z + 1 - m = 0$  có nghiệm phức  $z$  thỏa mãn  $|z| = 2$ . Tính  $S$ .

- (A) -3.      (B) 7.      (C) 6.      (D) 10.

**Câu 45.8.** Cho  $m$  là số thực, biết phương trình  $z^2 - mz + 13 = 0$  có hai nghiệm phức  $z_1, z_2$ ; trong đó có một nghiệm có phần ảo là 2. Tính  $|z_1|^2 + |z_2|^2$ .

- (A) 26.      (B)  $2\sqrt{13}$ .      (C) 13.      (D)  $\sqrt{13}$ .

**Câu 45.9.** Gọi  $z_1, z_2$  là hai nghiệm của phương trình  $\frac{|z|^4}{z^2} + \bar{z} = 4$ . Khi đó  $|z_1 + z_2|$  bằng

- (A) 2.      (B) 4.      (C) 8.      (D) 1.

**Câu 45.10.** Cho số phức  $z$  thỏa mãn  $z^2 - 2z + 3 = 0$ . Tính  $|w|$  biết  $w = z^{2018} - z^{2017} + z^{2016} + 3z^{2015} + 3z^2 - z + 9$ .

- (A)  $9\sqrt{3}$ .      (B)  $\sqrt{3}$ .      (C)  $5\sqrt{3}$ .      (D)  $2018\sqrt{3}$ .

**Câu 45.11.** Cho hai số phức không thuần thực  $z_1$  và  $z_2$  thỏa mãn phương trình  $z^2 - 2az + 3 = 0$ , với  $a$  là số thực. Giá trị của biểu thức  $T = |z_1| + |z_2|$  bằng

- (A) 6.      (B)  $2\sqrt{3}$ .      (C)  $2\sqrt{5}$ .      (D)  $2\sqrt{2}$ .

**Câu 45.12.** Gọi  $z_1, z_2, z_3, z_4$  là bốn nghiệm phân biệt của phương trình  $z^4 + z^2 + 1 = 0$  trên tập số phức. Tính giá trị của biểu thức  $P = |z_1|^2 + |z_2|^2 + |z_3|^2 + |z_4|^2$ .

- (A) 4.                      (B) 8.                      (C) 6.                      (D) 2.

**Câu 45.13.** Phương trình  $z^2 + az + b = 0$  có một nghiệm là  $2 - 3i$ . Khi đó  $3a + b$  bằng

- (A) 0.                      (B) 3.                      (C) 2.                      (D) 1.

**Câu 45.14.** Bốn nghiệm của phương trình  $z^4 - 1 = 0$  được biểu diễn bởi bốn điểm  $A, B, C, D$  trên mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ . Tính diện tích tứ giác tạo thành từ bốn điểm trên.

- (A) 4.                      (B) 2.                      (C) 1.                      (D)  $\frac{1}{4}$ .

**Câu 45.15.** Cho phương trình  $z^4 - 2z^3 + 6z^2 - 8z + 9 = 0$  có bốn nghiệm phức phân biệt là  $z_1, z_2, z_3, z_4$ . Tính giá trị của biểu thức  $T = (z_1^2 + 4)(z_2^2 + 4)(z_3^2 + 4)(z_4^2 + 4)$ .

- (A)  $T = 0$ .                      (B)  $T = 2i$ .                      (C)  $T = 1$ .                      (D)  $T = -2i$ .

**Câu 45.16.** Cho  $a, b, c$  là các số thực sao cho phương trình  $z^3 + az^2 + bz + c = 0$  có ba nghiệm phức lần lượt là  $z_1 = w + 3i; z_2 = w + 9i; z_3 = 2w - 4$ , trong đó  $w$  là một số phức nào đó. Tính giá trị của  $P = |a + b + c|$ .

- (A)  $P = 136$ .                      (B)  $P = 84$ .                      (C)  $P = 36$ .                      (D)  $P = 208$ .

**Câu 45.17.** Gọi  $S$  là tập hợp các số phức  $z$  thỏa mãn điều kiện  $z^4 = |z|$ . Số phần tử của  $S$  là

- (A) 5.                      (B) 4.                      (C) 7.                      (D) 6.

**Câu 45.18.** Gọi  $S$  là tập hợp các số thực  $m$  để phương trình  $z^2 + 3z + m^2 - 2m = 0$  có một nghiệm phức  $z_0$  với  $|z_0| = 2$ . Tổng tất cả các phần tử trong  $S$  là

- (A) 4.                      (B) 6.                      (C) 2.                      (D) 3.

**Câu 45.19.** Gọi  $z_1, z_2$  là hai nghiệm phức của phương trình  $z^2 - 2z + 2 = 0$ . Tập hợp các điểm biểu diễn của số phức  $w$  thỏa mãn  $|w - z_1| = |w - z_2|$  là đường thẳng có phương trình

- (A)  $x + y = 0$ .                      (B)  $y = 0$ .                      (C)  $x - y = 0$ .                      (D)  $x = 0$ .

**Câu 45.20.** Trên tập hợp số phức, cho phương trình  $z^2 + bz + c = 0$  với  $b, c \in \mathbb{R}$ . Biết rằng hai nghiệm của phương trình có dạng  $w + 3$  và  $2w - 15i + 9$  với  $w$  là một số phức. Tính  $S = b^2 - 2c$ .

- (A)  $S = -32$ .                      (B)  $S = 1608$ .                      (C)  $S = 1144$ .                      (D)  $S = -64$ .

**(D) BẢNG ĐÁP ÁN**

45.1. D	45.2. A	45.3. C	45.4. B	45.5. B	45.6. D	45.7. B	45.8. A
45.9. D	45.10. C	45.11. B	45.12. A	45.13. D	45.14. B	45.15. C	45.16. A
45.17. A	45.18. A	45.19. B	45.20. A				

## DẠNG 46. PHƯƠNG TRÌNH MẶT PHẪNG VÀ KHOẢNG CÁCH

### A KIẾN THỨC CẦN NHỚ

Cho mặt phẳng  $(\alpha): Ax + By + Cz + D = 0$  và điểm  $M(x_0; y_0; z_0)$ . Khoảng cách từ điểm  $M$  đến mặt phẳng  $(\alpha)$  là

$$d(M, (\alpha)) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

### B BÀI TẬP MẪU

**CÂU 46.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho điểm  $A(0; 1; 2)$  và đường thẳng  $d: \frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{-3}$ . Gọi  $(P)$  là mặt phẳng đi qua  $A$  chứa  $d$ . Khoảng cách từ điểm  $M(5; -1; 3)$  đến  $(P)$  bằng

- (A) 5.                      (B)  $\frac{1}{3}$ .                      (C) 1.                      (D)  $\frac{11}{3}$ .

### C BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ PHÁT TRIỂN

**Câu 46.1.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho hai mặt cầu  $(S): x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 25$  và  $(S'): (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 1$ . Mặt phẳng  $(P)$  tiếp xúc  $(S')$  và cắt  $(S)$  theo giao tuyến là một đường tròn có chu vi bằng  $6\pi$ . Khoảng cách từ  $O$  đến mặt phẳng  $(P)$  bằng

- (A)  $\frac{17}{7}$ .                      (B)  $\frac{19}{2}$ .                      (C)  $\frac{8}{9}$ .                      (D)  $\frac{14}{3}$ .

**Câu 46.2.** Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$  cho mặt cầu  $(S)$  có phương trình  $x^2 + y^2 + z^2 - 2(a+4b)x + 2(a-b+c)y + 2(b-c)z + d = 0$  có tâm  $I$  nằm trên mặt phẳng  $(\alpha)$  cố định. Biết rằng  $4a + b - 2c = 4$ . Tìm khoảng cách từ điểm  $D(1; 2; -2)$  đến mặt phẳng  $(\alpha)$ .

- (A)  $\frac{9}{\sqrt{15}}$ .                      (B)  $\frac{1}{\sqrt{314}}$ .                      (C)  $\frac{15}{\sqrt{23}}$ .                      (D)  $\frac{1}{\sqrt{915}}$ .

**Câu 46.3.** Cho mặt phẳng  $(\alpha)$  đi qua hai điểm  $M(4; 0; 0)$ ,  $N(0; 0; 3)$  sao cho mặt phẳng  $(\alpha)$  tạo với mặt phẳng  $Oyz$  một góc bằng  $60^\circ$ . Tính khoảng cách từ gốc tọa độ đến mặt phẳng  $(\alpha)$ .

- (A)  $\frac{2}{\sqrt{3}}$ .                      (B) 2.                      (C) 1.                      (D)  $\frac{3}{2}$ .

**Câu 46.4.** Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , cho mặt phẳng  $(P): 2x - 2y + z + 3 = 0$  và điểm  $A(1; -2; 3)$ . Gọi  $M(a; b; c) \in (P)$  sao cho  $AM = 4$ . Tính  $a + b + c$ .

- (A)  $\frac{2}{3}$ .                      (B) 2.                      (C)  $\frac{8}{3}$ .                      (D) 12.

**Câu 46.5.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho điểm  $M(1; 2; 3)$ . Mặt phẳng  $(P): x + Ay + Bz + C = 0$  chứa trục  $Oz$  và cách điểm  $M$  một khoảng lớn nhất, khi đó tổng  $A + B + C$  bằng

- (A) -3.                      (B) 3.                      (C) 2.                      (D) 6.

**Câu 46.6.** Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , cho mặt phẳng  $(P)$  đi qua điểm  $M(2; 3; 5)$  cắt các tia  $Ox, Oy, Oz$  lần lượt tại ba điểm  $A, B, C$  sao cho  $OA, OB, OC$  theo thứ tự lập thành cấp số nhân có công bội bằng 3. Khoảng cách từ  $O$  đến mặt phẳng  $(P)$  bằng

- (A)  $\frac{32}{\sqrt{91}}$ .                      (B)  $\frac{18}{\sqrt{91}}$ .                      (C)  $\frac{16}{\sqrt{91}}$ .                      (D)  $\frac{24}{\sqrt{91}}$ .

**Câu 46.7.** Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxy$ , cho mặt phẳng  $(P): 2y - z + 3 = 0$  và điểm  $A(2; 0; 0)$ . Mặt phẳng  $(\alpha)$  đi qua  $A$ , vuông góc với  $(P)$ , cách gốc tọa độ  $O$  một khoảng bằng  $\frac{4}{3}$  và cắt các tia  $Oy, Oz$  lần lượt tại các điểm  $B, C$  khác  $O$ . Thể tích khối tứ diện  $OABC$  bằng

- (A) 8.                      (B) 16.                      (C)  $\frac{8}{3}$ .                      (D)  $\frac{16}{3}$ .

**Câu 46.8.** Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , cho hình lăng trụ  $ABC.A'B'C'$  có đáy  $ABC$  là tam giác vuông cân tại  $A$  và có độ dài các cạnh  $BC = 4$  và thể tích khối lăng trụ bằng 8. Biết phương trình mặt phẳng  $(ABC): x + y - z - 2 = 0$ . Hãy viết phương trình mặt phẳng  $(A'B'C')$  biết nó cắt trục  $Ox$  tại điểm có hoành độ dương.

- (A)  $x + y - z - 2 + 2\sqrt{3} = 0$ .                      (B)  $2x + 2y - z - 4 - \sqrt{3} = 0$ .  
(C)  $x + y - z - 2 - 2\sqrt{3} = 0$ .                      (D)  $x + y - z - 4 + \sqrt{3} = 0$ .

**Câu 46.9.** Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , mặt phẳng  $(\alpha)$  đi qua điểm  $M(1; 2; 1)$  và cắt các tia  $Ox, Oy, Oz$  lần lượt tại  $A, B, C$  sao cho độ dài  $OA, OB, OC$  theo thứ tự tạo thành một cấp số nhân có công bội bằng 2. Tính khoảng cách từ gốc tọa độ  $O$  tới mặt phẳng  $(\alpha)$ .

- (A)  $\frac{\sqrt{21}}{21}$ .                      (B)  $\frac{3\sqrt{21}}{7}$ .                      (C)  $9\sqrt{21}$ .                      (D)  $\frac{4}{\sqrt{21}}$ .

**Câu 46.10.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho mặt cầu  $(S): x^2 + (y - 3)^2 + (z - 6)^2 = 45$  và  $M(1; 4; 5)$ . Ba đường thẳng thay đổi  $d_1, d_2, d_3$  nhưng luôn đôi một vuông góc tại  $O$  cắt mặt cầu tại điểm thứ hai lần lượt là  $A, B, C$ . Khoảng cách lớn nhất từ  $M$  đến mặt phẳng  $(ABC)$  là

- (A)  $\sqrt{5}$ .                      (B) 4.                      (C)  $\sqrt{6}$ .                      (D) 3.

**Câu 46.11.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho ba điểm  $A(a; 0; 0), B(0; b; 0), C(0; 0; c)$  với  $a, b, c$  là các số thực dương thay đổi tùy ý sao cho  $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ . Khoảng cách từ  $O$  đến mặt phẳng  $(ABC)$  lớn nhất là

- (A) 1.                      (B)  $\frac{1}{3}$ .                      (C) 3.                      (D)  $\frac{1}{\sqrt{3}}$ .

**Câu 46.12.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho các điểm  $A(a; 0; 0), B(0; b; 0), C(0; 0; 2)$ , trong đó  $a, b$  là các số hữu tỷ dương và mặt phẳng  $(P)$  có phương trình  $2x - 2y + 1 = 0$ . Biết rằng mặt phẳng  $(ABC)$  vuông góc với mặt phẳng  $(P)$  và khoảng cách từ  $O$  đến mặt phẳng  $(ABC)$  bằng  $\frac{2}{\sqrt{33}}$ . Giá trị  $a \cdot b$  bằng

- (A)  $\frac{1}{4}$ .                      (B) 4.                      (C) 1.                      (D) 0.

**Câu 46.13.** Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , cho mặt phẳng  $(P): 3x + 4y + 5z + 1 = 0$  và ba điểm  $A(2; 5; -3), B(-2; 1; 1), C(2; 0; 1)$ . Tìm điểm  $D(a; b; c), (b > 0)$  là điểm nằm trên  $(P)$  sao



cho có vô số mặt phẳng  $(Q)$  đi qua hai điểm  $C, D$  và thỏa mãn khoảng cách từ điểm  $A$  đến mặt phẳng  $(Q)$  gấp 3 lần khoảng cách từ  $B$  đến  $(Q)$ . Tính  $T = abc$ .

- (A)  $-16$ .                      (B)  $0$ .                      (C)  $16$ .                      (D)  $12$ .

**Câu 46.14.** Cho mặt phẳng  $(\alpha)$  đi qua hai điểm  $M(4; 0; 0)$  và  $N(0; 0; 3)$  sao cho mặt phẳng  $(\alpha)$  tạo với mặt phẳng  $(Oyz)$  một góc bằng  $60^\circ$ . Tính khoảng cách từ điểm gốc tọa độ đến mặt phẳng  $(\alpha)$ .

- (A)  $1$ .                      (B)  $\frac{3}{2}$ .                      (C)  $\frac{2}{\sqrt{3}}$ .                      (D)  $2$ .

**Câu 46.15.** Trong không gian  $Oxyz$  cho mặt cầu  $(S): (x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z - 3)^2 = 9$  và mặt phẳng  $(P): 2x - 2y + z + 3 = 0$ . Gọi  $M(a; b; c)$  là điểm trên mặt cầu sao cho khoảng cách từ  $M$  đến  $(P)$  lớn nhất. Khi đó

- (A)  $a + b + c = 7$ .                      (B)  $a + b + c = 5$ .                      (C)  $a + b + c = 6$ .                      (D)  $a + b + c = 8$ .

**Câu 46.16.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho điểm  $A(10; 2; 1)$  và đường thẳng  $d: \frac{x - 1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z - 1}{3}$ . Gọi  $(P)$  là mặt phẳng đi qua điểm  $A$ , song song với đường thẳng  $d$  sao cho khoảng cách giữa  $d$  và  $(P)$  lớn nhất. Khoảng cách từ điểm  $M(-1; 2; 3)$  đến mặt phẳng  $(P)$  bằng

- (A)  $\frac{2\sqrt{13}}{13}$ .                      (B)  $\frac{76\sqrt{790}}{790}$ .                      (C)  $\frac{533}{\sqrt{2765}}$ .                      (D)  $\frac{97\sqrt{3}}{15}$ .

**Câu 46.17.** Tìm  $m$  để khoảng cách từ điểm  $A\left(\frac{1}{2}; 1; 4\right)$  đến đường thẳng

$$(d): \begin{cases} x = 1 - 2m + mt \\ y = -2 + 2m + (1 - m)t \\ z = 1 + t \end{cases} \text{ đạt giá trị lớn nhất.}$$

- (A)  $m = \frac{1}{3}$ .                      (B)  $m = 16$ .                      (C)  $m = \frac{2}{3}$ .                      (D)  $m = \frac{4}{3}$ .

**Câu 46.18.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho ba điểm  $A(-1; 0; 1)$ ,  $B(3; 2; 1)$ ,  $C(5; 3; 7)$ . Gọi  $M(a; b; c)$  là điểm thỏa mãn  $MA = MB$  và  $MB + MC$  đạt giá trị nhỏ nhất. Tính  $P = a + b + c$

- (A)  $P = 0$ .                      (B)  $P = 2$ .                      (C)  $P = 5$ .                      (D)  $P = 4$ .

**Câu 46.19.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho điểm  $A(1; 2; -3)$  và mặt phẳng  $(P): 2x + 2y - z + 9 = 0$ . Đường thẳng  $d$  đi qua  $A$  và vuông góc với mặt phẳng  $(Q): 3x + 4y - 4z + 5 = 0$ , cắt mặt phẳng  $(P)$  tại  $B$ . Điểm  $M$  nằm trong mặt phẳng  $(P)$  sao cho  $M$  luôn nhìn  $AB$  dưới góc vuông. Tính độ dài lớn nhất của  $MB$ .

- (A)  $MB = \frac{\sqrt{5}}{2}$ .                      (B)  $MB = \sqrt{5}$ .                      (C)  $MB = \sqrt{41}$ .                      (D)  $MB = \frac{\sqrt{41}}{2}$ .

**Câu 46.20.** Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , cho mặt cầu  $(S): (x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z - 3)^2 = 4$ .

Xét đường thẳng  $d: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -mt \\ z = (m - 1)t \end{cases}$  với  $m$  là tham số thực. Giả sử  $(P)$  và  $(P')$  là hai mặt phẳng

chứa  $d$ , tiếp xúc với  $(S)$  lần lượt tại  $T$  và  $T'$ . Khi  $m$  thay đổi, tính giá trị nhỏ nhất của độ dài đoạn thẳng  $TT'$

(A)  $\frac{4\sqrt{13}}{5}$ .

(B)  $2\sqrt{2}$ .

(C) 2.

(D)  $\frac{2\sqrt{11}}{3}$ .

**(D) BẢNG ĐÁP ÁN**

46.1. D	46.2. D	46.3. B	46.4. A	46.5. C	46.6. A	46.7. C	46.8. C
46.9. B	46.10. C	46.11. B	46.12. A	46.13. C	46.14. D	46.15. A	46.16. C
46.17. D	46.18. C	46.19. B	46.20. B				

## DẠNG 47. PHÉP ĐẾM

### A KIẾN THỨC CẦN NHỚ

#### CÂU 47 (ĐỀ minh họa BGD 2022-2023).

Có bao nhiêu cặp số nguyên  $(x; y)$  thỏa mãn

$$\log_3(x^2 + y^2 + x) + \log_2(x^2 + y^2) \leq \log_3 x + \log_2(x^2 + y^2 + 24x)?$$

### B BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ PHÁT TRIỂN

**Câu 47.1.** Cho hàm số  $f(x) = \log_2(x + \sqrt{x^2 + 1})$ . Có bao nhiêu cặp số nguyên  $(a; b)$  thỏa mãn  $f\left(2^{a^2-ab+b} - \frac{1}{4}\right) + f\left((a^2 - ab + b + 2)2^{b-2-ab}\right) = 0$ .

- (A) 4.                      (B) 3.                      (C) 2.                      (D) 5.

**Câu 47.2.** Có bao nhiêu bộ hai số nguyên  $(x; y)$  thỏa  $1 \leq x^2 + x \leq 2020$  và

$$\log x + \log(x + 1) + x^2 + x = y + 10^y$$

- (A) 2.                      (B) 0.                      (C) 8.                      (D) 4.

**Câu 47.3.** Cho  $a > 0, b > 0$  thỏa mãn  $\log_{10a+3b+1}(25a^2 + b^2 + 1) + \log_{10ab+1}(10a + 3b + 1) = 2$ . Giá trị biểu thức  $a + 2b$  bằng

- (A) 22.                      (B) 6.                      (C)  $\frac{11}{2}$ .                      (D)  $\frac{5}{2}$ .

**Câu 47.4.** Hỏi có bao nhiêu số nguyên  $y$  sao cho mỗi giá trị của  $y$  có không quá 2021 số nguyên  $x$  thỏa mãn  $\log_2(x + y^2 + 1) - 3^{y^2+y-3x} < 0$ ?

- (A) 109.                      (B) 108.                      (C) 110.                      (D) 111.

**Câu 47.5.** Cho các số thực  $x, y$  thỏa mãn  $2x - y = e^x(2 - e^x) + \ln(2e^x + y)$ . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức  $P = x^2 + y^2 + 20y$ .

- (A) 0.                      (B) -21.                      (C) -100.                      (D) -19.

**Câu 47.6.** Cho  $x, y$  là các số thực thỏa mãn  $\log_3(x + y) = \log_4(x^2 + y^2)$ . Tập giá trị của biểu thức  $P = x^3 + y^3$  có chứa bao nhiêu giá trị nguyên?

- (A) 9.                      (B) Vô số.                      (C) 4.                      (D) 5.

**Câu 47.7.** Có bao nhiêu số hữu tỉ  $a$  thuộc đoạn  $[-1; 1]$  sao cho tồn tại số thực  $b$  thỏa mãn

$$\log_2(1 - a^2 - b^2 + 2b) = \frac{2^a}{4^a + 1} + \frac{4^a}{2^a + 1} + \frac{1}{2^a + 4^a} - \frac{1}{2}.$$

- (A) 3.                      (B) 1.                      (C) Vô số.                      (D) 0.

**Câu 47.8.** Có bao nhiêu cặp số nguyên  $(a; b)$  thỏa mãn  $1 < a < b < 100$  để phương trình  $a^{b^x} = b^{a^x}$  có nghiệm nhỏ hơn 1?

- (A) 4750.                      (B) 4656.                      (C) 2.                      (D) 4751.

**Câu 47.9.** Cho phương trình  $\frac{1}{2} \log_2(x+2) + x + 3 = \log_2 \frac{2x+1}{x} + \left(1 + \frac{1}{x}\right)^2 + 2\sqrt{x+2}$ , gọi  $S$  là tổng tất cả các nghiệm của nó. Khi đó, giá trị của  $S$  là

- (A)  $S = \frac{1 - \sqrt{13}}{2}$ .                      (B)  $S = 2$ .                      (C)  $S = \frac{1 + \sqrt{13}}{2}$ .                      (D)  $S = -2$ .

**Câu 47.10.** Cho  $0 \leq x \leq 2020$  và  $\log_2(2x+2) + x - 3y = 8^y$ . Có bao nhiêu cặp số  $(x; y)$  nguyên thỏa mãn các điều kiện trên?

- (A) 1.                      (B) 4.                      (C) 2019.                      (D) 2018.

**Câu 47.11.** Có bao nhiêu bộ  $(x; y)$  với  $x, y$  nguyên và  $1 \leq x, y \leq 2020$  thỏa mãn  $(xy + 2x + 4y + 8) \log_3 \left(\frac{2y}{y+2}\right) \leq (2x + 3y - xy - 6) \log_2 \left(\frac{2x+1}{x-3}\right)$ ?

- (A) 2.                      (B)  $2017 \cdot 2020$ .                      (C) 2017.                      (D) 4034.

**Câu 47.12.** Cho  $x, y > 0$  thỏa mãn  $\log(x+2y) = \log x + \log y$ . Khi đó, giá trị nhỏ nhất của biểu thức  $P = \frac{x^2}{1+2y} + \frac{4y^2}{1+x}$  là

- (A) 6.                      (B)  $\frac{32}{5}$ .                      (C)  $\frac{31}{5}$ .                      (D)  $\frac{29}{5}$ .

**Câu 47.13.** Cho  $x, y$  là các số thực dương thỏa mãn  $3 + \ln \left(\frac{x+y+1}{3xy}\right) = 9xy - 3x - 3y$ . Tìm giá trị nhỏ nhất  $m$  của biểu thức  $P = xy$ .

- (A)  $m = \frac{1}{3}$ .                      (B)  $m = 1$ .                      (C)  $m = \frac{1}{2}$ .                      (D)  $m = 0$ .

**Câu 47.14.** Cho phương trình  $\frac{1}{2} \log_2(x+2) + x + 3 = \log_2 \frac{2x+1}{x} + \left(1 + \frac{1}{x}\right)^2 + 2\sqrt{x+2}$ . Gọi  $S$  là tổng tất cả các nghiệm của nó. Khi đó, giá trị của  $S$  là

- (A)  $S = \frac{1 + \sqrt{13}}{2}$ .                      (B)  $S = \frac{1 - \sqrt{13}}{2}$ .                      (C)  $S = 2$ .                      (D)  $S = -2$ .

**Câu 47.15.** Cho phương trình  $\log(x-3) + 2x\sqrt{x-3} + 6x - 16 = 2 \log(x-4) + 2(x-3)^3$  có một nghiệm có dạng  $x = \frac{a + \sqrt{b}}{2}$ , trong đó  $a, b$  là hai số nguyên dương. Giá trị của biểu thức  $a + b$  bằng

- (A) 10.                      (B) 14.                      (C) 5.                      (D) 9.

**Câu 47.16.** Biết rằng  $2^{\frac{1}{x}} = \log_2 [14 - (y-2)\sqrt{y+1}]$  trong đó  $x > 0$ .

Tính giá trị của biểu thức  $P = x^2 + y^2 - xy + 1$ .

- (A) 4.                      (B) 3.                      (C) 1.                      (D) 2.

**Câu 47.17.** Phương trình  $2 \log_3(\cot x) = \log_2(\cos x)$  có bao nhiêu nghiệm trong khoảng  $(0; 2018\pi)$ ?

- (A) 2018 nghiệm.      (B) 1008 nghiệm.      (C) 2017 nghiệm.      (D) 1009 nghiệm.

**Câu 47.18.** Cho  $x, y$  là các số thực dương thỏa mãn  $\log_2\left(\frac{x+4y}{x+y}\right) = 2x - 4y + 1$ . Giá trị nhỏ nhất của biểu thức  $P = \frac{2x^4 - 2x^2y^2 + 6x^2}{(x+y)^3}$ .

- (A)  $\frac{16}{9}$ .      (B)  $\frac{25}{9}$ .      (C) 4.      (D)  $\frac{9}{4}$ .

**Câu 47.19.** Phương trình  $\left(\frac{1}{2020}x + 9\right) \log_3\left((x^2 + 1)\left(\frac{1}{2020}x + 9\right)\right) = 9 - (x^2 - 1)\left(\frac{1}{2020}x + 9\right)$  có tất cả bao nhiêu nghiệm thực phân biệt?

- (A) 3.      (B) 2.      (C) 4.      (D) 1.

**Câu 47.20.** Cho  $a$  là hằng số dương khác 1 thỏa mãn  $a^{2 \cos 2x} \geq 4 \cos^2 x - 1; \forall x \in \mathbb{R}$ . Giá trị  $a$  thuộc khoảng nào sau đây?

- (A)  $(2; 3)$ .      (B)  $(0; 2)$ .      (C)  $(3; 5)$ .      (D)  $(4; +\infty)$ .

### BẢNG ĐÁP ÁN

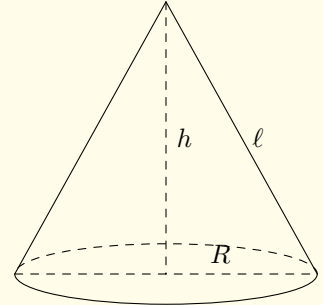
47.1. A	47.2. B	47.3. C	47.4. C	47.5. D	47.6. C	47.7. B	47.8. D
47.9. C	47.10. B	47.11. D	47.12. B	47.13. B	47.14. A	47.15. B	47.16. D
47.17. A	47.19. A	47.20. A					

## DẠNG 48. HÌNH NÓN - HÌNH TRỤ

### A KIẾN THỨC CẦN NHỚ

Cho hình nón có đường cao  $h$ , bán kính đáy  $R$  và đường sinh  $\ell$ .

- Mối liên hệ  $\ell^2 = h^2 + R^2$ .
- Thể tích khối nón  $V = \frac{1}{3} \cdot \pi R^2 h$ .
- Diện tích xung quanh  $S_{xq} = 2\pi Rh$ .



### B BÀI TẬP MẪU

#### CÂU 48 (ĐỀ minh họa BGD 2022-2023).

Cho khối nón có đỉnh  $S$ , chiều cao bằng 8 và thể tích bằng  $\frac{800\pi}{3}$ . Gọi  $A$  và  $B$  là hai điểm thuộc đường tròn đáy sao cho  $AB = 12$ , khoảng cách từ tâm của đường tròn đáy đến mặt phẳng  $(SAB)$  bằng

- A  $8\sqrt{2}$ .     
  B  $\frac{24}{5}$ .     
  C  $4\sqrt{2}$ .     
  D  $\frac{5}{24}$ .

### C BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ PHÁT TRIỂN

**Câu 48.1.** Cho khối nón có đỉnh  $S$ , chiều cao bằng 6 và độ dài đường sinh  $\ell = 2\sqrt{34}$ . Gọi  $A$  và  $B$  là hai điểm thuộc đường tròn đáy sao cho  $AB = 12$ , khoảng cách từ tâm của đường tròn đáy đến mặt phẳng  $(SAB)$  bằng

- A  $\frac{12}{5}$ .     
  B  $\frac{24}{5}$ .     
  C  $\frac{12}{25}$ .     
  D  $\frac{24}{25}$ .

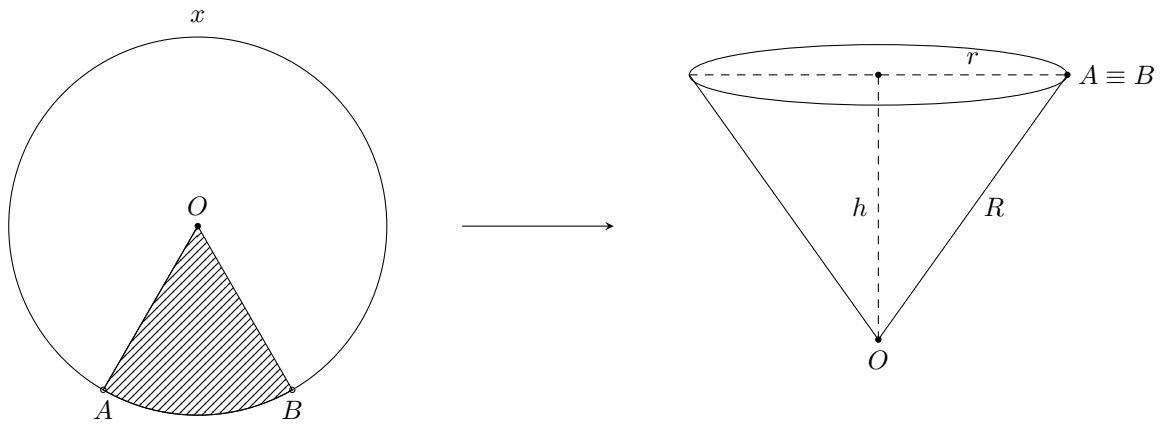
**Câu 48.2.** Cho khối nón có đỉnh  $S$ , thiết diện qua trục của khối nón là tam giác đều cạnh 6. Gọi  $A$  và  $B$  là hai điểm thuộc đường tròn đáy sao cho khoảng cách từ tâm  $O$  của đường tròn đáy đến mặt phẳng  $(SAB)$  bằng  $\sqrt{3}$ . Độ dài đoạn thẳng  $AB$  là

- A  $\frac{3\sqrt{10}}{4}$ .     
  B  $\frac{3\sqrt{10}}{2}$ .     
  C  $\frac{2\sqrt{10}}{3}$ .     
  D  $\frac{4\sqrt{10}}{3}$ .

**Câu 48.3.** Một hình nón có đỉnh  $S$ , bán kính đáy là  $R = 2a\sqrt{3}$  và góc ở đỉnh  $120^\circ$ . Mặt phẳng  $(P)$  qua đỉnh  $S$ , hợp với đáy góc  $45^\circ$  cắt hình nón theo thiết diện là tam giác  $SAB$ . Diện tích tam giác  $SAB$  là

- A  $2a^2$ .     
  B  $4a^2$ .     
  C  $6a^2$ .     
  D  $8a^2$ .

**Câu 48.4.** Từ một đĩa phẳng hình tròn bằng thép bán kính  $R$ , người ta làm một cái phễu bằng cách cắt đi một hình quạt của đĩa này và gấp phần còn lại thành một hình nón.



Gọi độ dài cung tròn của hình quạt còn lại là  $x$ . Thể tích khối nón tạo thành nhận giá trị lớn nhất khi

- (A)  $x = \frac{\pi R\sqrt{6}}{3}$ .      (B)  $x = \frac{2\pi R\sqrt{3}}{3}$ .      (C)  $x = \frac{2\pi R\sqrt{2}}{3}$ .      (D)  $x = \frac{2\pi R\sqrt{6}}{3}$ .

**Câu 48.5.** Cho mặt cầu tâm  $I$  bán kính  $R$ . Mặt phẳng  $(P)$  thay đổi cắt mặt cầu theo giao tuyến là đường tròn  $(C)$ . Hình nón có đỉnh  $S$  nằm trên mặt cầu, đáy là đường tròn  $(C)$  và chiều cao  $h$  ( $h > R$ ). Thể tích khối nón có giá trị lớn nhất khi

- (A)  $h = \sqrt{2}R$ .      (B)  $h = \sqrt{3}R$ .      (C)  $h = \frac{4}{3}R$ .      (D)  $h = \frac{3}{2}R$ .

**Câu 48.6.** Một công ty sản xuất một loại cốc giấy hình nón có thể tích  $27 \text{ cm}^3$ , với chiều cao  $h$  và bán kính đáy  $r$ . Giá trị  $r$  để lượng giấy tiêu thụ ít nhất

- (A)  $r = \sqrt[6]{\frac{3^8}{2\pi^2}}$ .      (B)  $r = \sqrt[4]{\frac{3^8}{2\pi^2}}$ .      (C)  $r = \sqrt[6]{\frac{3^6}{2\pi^2}}$ .      (D)  $r = \sqrt[4]{\frac{3^6}{2\pi^2}}$ .

**Câu 48.7.** Cho hình nón đỉnh  $S$  có đường cao  $h = a$ , đường sinh  $l = 2a$ . Một mặt phẳng đi qua đỉnh  $S$  và cắt đường tròn đáy tại hai điểm  $M, N$ . Diện tích tam giác  $SMN$  lớn nhất bằng

- (A)  $a^2\sqrt{3}$ .      (B)  $\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$ .      (C)  $2a^2$ .      (D)  $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ .

**Câu 48.8.** Một hình nón đỉnh  $S$  có bán kính đáy bằng  $2a\sqrt{3}$ , tâm của đáy là  $O$ , góc ở đỉnh bằng  $120^\circ$ .  $AB$  là một đường kính cố định của đáy,  $H$  là trung điểm của  $OA$ . Mặt phẳng luôn chứa  $SH$  cắt khối nón theo một thiết diện có diện tích lớn nhất là bao nhiêu?

- (A)  $S_{\max} = 4a^2\sqrt{2}$ .      (B)  $S_{\max} = 3\sqrt{7}a^2$ .      (C)  $S_{\max} = \frac{3\sqrt{7}}{2}a^2$ .      (D)  $S_{\max} = 8a^2$ .

**Câu 48.9.** Cho hình nón  $(N)$  có đường cao  $SO = h$  và bán kính đáy bằng  $R$ , gọi  $M$  là điểm trên đoạn  $SO$ , đặt  $OM = x$ ,  $0 < x < h$ .  $(C)$  là thiết diện của mặt phẳng  $(P)$  vuông góc với trục  $SO$  tại  $M$ , với hình nón  $(N)$ . Tìm  $x$  để thể tích khối nón đỉnh  $O$  đáy là  $(C)$  lớn nhất.

- (A)  $\frac{h}{2}$ .      (B)  $\frac{h\sqrt{2}}{2}$ .      (C)  $\frac{h\sqrt{3}}{2}$ .      (D)  $\frac{h}{3}$ .

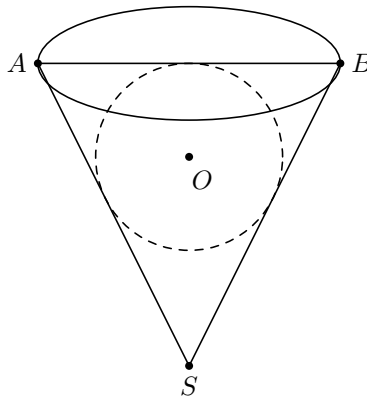
**Câu 48.10.** Một công ty sản xuất một loại cốc giấy hình nón có thể tích bằng  $27 \text{ cm}^3$ . Tìm tỉ số  $\frac{h}{r}$  của chiều cao  $h$  và bán kính đáy  $r$  của hình nón để lượng giấy tiêu thụ ít nhất.

- (A)  $\frac{h}{r} = 2$ .      (B)  $\frac{h}{r} = \frac{1}{2}$ .      (C)  $\frac{h}{r} = \sqrt{2}$ .      (D)  $\frac{h}{r} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ .

**Câu 48.11.** Một hình nón có đỉnh  $S$  có bán kính đáy bằng  $2a\sqrt{3}$ , góc ở đỉnh là  $120^\circ$ . Thiết diện qua đỉnh của hình nón là một tam giác. Diện tích lớn nhất  $S_{\max}$  của tam giác đó bằng bao nhiêu?

- (A)  $S_{\max} = 16a^2$ .      (B)  $S_{\max} = 4a^2\sqrt{2}$ .      (C)  $S_{\max} = 4a^2$ .      (D)  $S_{\max} = 8a^2$ .

**Câu 48.12.** Bạn An có một cốc giấy hình nón với đường kính đáy là 10 cm và độ dài đường sinh là 8 cm. Bạn dự định đựng một viên kẹo hình cầu sao cho toàn bộ viên kẹo nằm trong cốc (không phần nào của viên kẹo cao hơn miệng cốc). Hỏi bạn An có thể đựng được viên kẹo có đường kính lớn nhất bằng bao nhiêu?

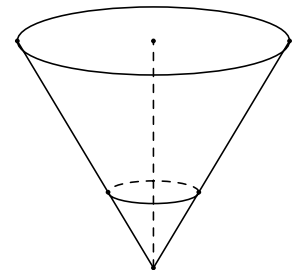


- (A)  $\frac{5\sqrt{39}}{13}$  cm.      (B)  $\frac{64}{\sqrt{39}}$  cm.      (C)  $\frac{10\sqrt{39}}{13}$  cm.      (D)  $\frac{32}{\sqrt{39}}$  cm.

**Câu 48.13.**

Một chiếc ly hình nón chứa đầy rượu có chiều cao 9 cm. Người ta uống đi một phần rượu sao cho chiều cao phần rượu còn lại bằng một phần ba chiều cao ban đầu. Số phần rượu đã được uống là

- (A)  $\frac{8}{9}$ .      (B)  $\frac{1}{3}$ .      (C)  $\frac{26}{27}$ .      (D)  $\frac{2}{3}$ .



**Câu 48.14.** Cho hình nón ( $N$ ) có đường cao  $h = a\sqrt{3}$ , bán kính đáy  $r = 2a$ . Cắt hình nón bởi một mặt phẳng ( $P$ ) qua đỉnh và tạo với mặt phẳng chứa đáy hình nón một góc  $45^\circ$ . Diện tích thiết diện tạo thành là

- (A)  $S = a^2\sqrt{3}$ .      (B)  $S = a^2\sqrt{6}$ .      (C)  $S = 2a^2$ .      (D)  $S = 2a^2\sqrt{6}$ .

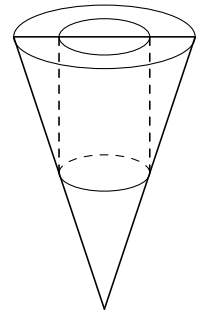
**Câu 48.15.** Cho khối nón đỉnh  $S$  có bán kính đáy bằng  $a$  và chiều cao bằng  $\frac{a}{2}$ . Một mặt phẳng thay đổi nhưng luôn đi qua  $S$  và cắt hình nón theo thiết diện là tam giác  $SAB$ . Giá trị lớn nhất của tam giác  $SAB$  là

- (A)  $\frac{5a^2}{8}$ .      (B)  $\frac{a^2}{2}$ .      (C)  $\frac{3a^2}{8}$ .      (D)  $\frac{2a^2}{3}$ .

**Câu 48.16.**



Một bình đựng nước dạng hình nón (không có đáy), đựng đầy nước. Biết rằng chiều cao của bình gấp 3 lần bán kính đáy của nó. Người ta thả vào đó một khối trụ và đo được thể tích nước tràn ra ngoài là  $\frac{16\pi}{9}$  (dm<sup>3</sup>). Biết rằng một mặt của khối trụ nằm trên mặt đáy của nón (như hình bên) đồng thời khối trụ có chiều cao bằng đường kính đáy của hình nón. Tính diện tích xung quanh  $S_{xq}$  của bình nước (giả sử khối trụ thả vào đặc và chìm hết trong nước).



- (A)  $S_{xq} = 4\pi$  dm<sup>2</sup>.                       (B)  $S_{xq} = 4\pi\sqrt{10}$  dm<sup>2</sup>.  
 (C)  $S_{xq} = \frac{4\pi}{2}$  dm<sup>2</sup>.                       (D)  $S_{xq} = \frac{9\pi\sqrt{10}}{2}$  dm<sup>2</sup>.

**Câu 48.17.** Cho khối nón đỉnh  $S$  có đáy là hình tròn tâm  $O$ . Dụng hai đường sinh  $SA$  và  $SB$  sao cho tam giác  $SAB$  vuông và có diện tích bằng  $4a^2$ , góc tạo bởi trục  $SO$  và mặt phẳng  $(SAB)$  bằng  $30^\circ$ . Thể tích của khối nón đã cho bằng

- (A)  $\frac{5a^3\sqrt{2}\pi}{3}$ .                       (B)  $\frac{a^3\sqrt{15}\pi}{6}$ .                       (C)  $\frac{a^3\sqrt{15}\pi}{3}$ .                       (D)  $\frac{5a^3\sqrt{3}\pi}{3}$ .

**Câu 48.18.** Cắt hình nón (N) bởi mặt phẳng đi qua đỉnh và tạo với mặt phẳng chứa đáy một góc bằng  $30^\circ$ , ta được thiết diện là tam giác đều cạnh  $4a$ . Diện tích xung quanh của (N) bằng

- (A)  $4\sqrt{7}\pi a^2$ .                       (B)  $8\sqrt{7}\pi a^2$ .                       (C)  $8\sqrt{13}\pi a^2$ .                       (D)  $4\sqrt{13}\pi a^2$ .

**Câu 48.19.** Người thợ gia công của một cơ sở chất lượng cao X cắt một miếng tôn hình tròn với bán kính 60 cm thành ba miếng hình quạt bằng nhau. Sau đó người thợ uốn và hàn ba miếng tôn để được ba cái phễu. Hỏi thể tích  $V$  của mỗi cái phễu đó là bao nhiêu?

- (A)  $V = \frac{16\sqrt{2}\pi}{3}$  lít.                       (B)  $V = \frac{16000\sqrt{2}\pi}{3}$  lít.  
 (C)  $V = \frac{160\sqrt{2}\pi}{3}$  lít.                       (D)  $V = \frac{16\sqrt{2}}{3}$  lít.

**Câu 48.20.** Bạn Hoàn có một tấm bìa hình tròn như hình vẽ. Hoàn muốn biến hình tròn đó thành một hình cái phễu hình nón. Khi đó Hoàn phải cắt bỏ hình quạt tròn  $AOB$  rồi dán hai bán kính  $OA$  và  $OB$  lại với nhau (diện tích chỗ dán nhỏ không đáng kể). Gọi  $x$  là góc ở tâm hình quạt tròn dùng làm phễu. Tìm  $x$  để thể tích phễu lớn nhất.

- (A)  $\frac{\pi}{4}$ .                       (B)  $\frac{\pi}{3}$ .                       (C)  $\frac{2\sqrt{6}\pi}{3}$ .                       (D)  $\frac{\pi}{2}$ .

**(D) BẢNG ĐÁP ÁN**

48.1. B	48.2. B	48.3. D	48.4. D	48.5. C	48.6. A	48.7. C	48.8. B
48.9. D	48.10. C	48.11. D	48.12. C	48.13. C	48.14. B	48.15. A	48.16. B
48.17. D	48.18. D	48.19. A	48.20. C				

# DẠNG 49. TƯƠNG GIAO ĐƯỜNG THẲNG, MẶT PHẪNG, MẶT CẦU, CỰC TRỊ

## A KIẾN THỨC CẦN NHỚ

### 1. Vị trí tương đối của hai mặt phẳng

Cho hai mặt phẳng  $(P): A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$  và  $(Q): A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ .

- $(P)$  cắt  $(Q) \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2} \neq \frac{D_1}{D_2}$ .
- $(P) \equiv (Q) \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2}$ .
- $(P) \parallel (Q) \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \neq \frac{D_1}{D_2}$ .
- $(P) \perp (Q) \Leftrightarrow A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$ .

### 2. Vị trí tương đối giữa mặt phẳng và mặt cầu

Cho mặt cầu  $S(I; R)$  và mặt phẳng  $(P)$ . Gọi  $H$  là hình chiếu vuông góc của  $I$  lên  $(P)$  và có  $d = IH$  là khoảng cách từ  $I$  đến mặt phẳng  $(P)$ . Khi đó :

Nếu $d > R$ : Mặt cầu và mặt phẳng không có điểm chung.	Nếu $d = R$ : Mặt phẳng tiếp xúc mặt cầu. Lúc đó $(P)$ là mặt phẳng tiếp diện của mặt cầu $(S)$ và $H$ là tiếp điểm.	Nếu $d < R$ : Mặt phẳng $(P)$ cắt mặt cầu theo thiết diện là đường tròn có tâm $H$ và bán kính là $r' = \sqrt{R^2 - IH^2}$ .
---	--	--

### 3. Vị trí tương đối

a. Vị trí tương đối của hai đường thẳng  $d: \begin{cases} x_0 + a_1t = 0 \\ y_0 + a_2t = 0 \\ z_0 + a_3t = 0 \end{cases}$  và  $d': \begin{cases} x'_0 + a'_1t' = 0 \\ y'_0 + a'_2t' = 0 \\ z'_0 + a'_3t' = 0 \end{cases}$ .

**PP 1** : Xét hệ phương trình với hai ẩn là  $t$  và  $t'$  tức xét  $\begin{cases} x_0 + a_1t = x'_0 + a'_1t' \\ y_0 + a_2t = y'_0 + a'_2t' \\ z_0 + a_3t = z'_0 + a'_3t' \end{cases}$

\* Nếu hệ có nghiệm duy nhất thì  $d$  và  $d'$  cắt nhau.

\* Nếu hệ có vô số nghiệm thì  $d \equiv d'$ .

\* Nếu hệ vô nghiệm thì  $d \parallel d'$  hoặc  $d, d'$  chéo nhau.

·  $\vec{u}_d$  và  $\vec{u}_{d'}$  cùng phương thì  $d \parallel d'$ .

·  $\vec{u}_d$  và  $\vec{u}_{d'}$  không cùng phương thì  $d, d'$  chéo nhau.

**PP 2** : Xét điểm  $M(x_0; y_0; z_0) \in d, M'(x'_0; y'_0; z'_0) \in d'$  và  $\vec{u}_d, \vec{u}_{d'}$ .

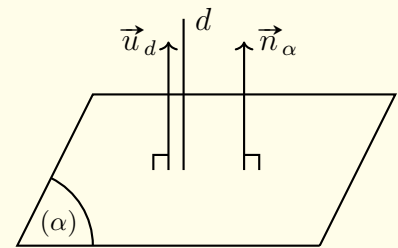
\*  $d \parallel d' \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{u}_d = k\vec{u}_{d'} \\ M \notin d' \end{cases}$

$$\begin{aligned}
 * d \equiv d' &\Leftrightarrow \begin{cases} \vec{u}_d = k\vec{u}_{d'} \\ M \in d'. \end{cases} \\
 * d \text{ cắt } d' &\Leftrightarrow \begin{cases} \vec{u}_d \text{ không cùng phương với } \vec{u}_{d'} \\ [\vec{u}_d, \vec{u}_{d'}] \cdot \overrightarrow{MM'} = 0 \end{cases} \\
 * d \text{ chéo } d' &\Leftrightarrow [\vec{u}_d, \vec{u}_{d'}] \cdot \overrightarrow{MM'} \neq 0.
 \end{aligned}$$

**b. Vị trí tương đối giữa đường thẳng và mặt phẳng**

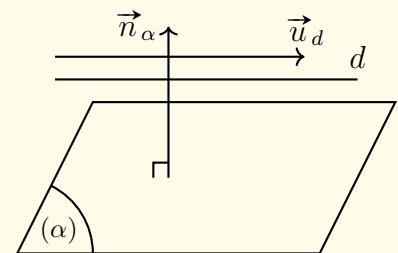
Cho đường thẳng  $d: \begin{cases} x = x_0 + a_1t \\ y = y_0 + a_2t \\ z = z_0 + a_3t \end{cases}$  và mặt phẳng  $(\alpha): Ax + By + Cz + D = 0$ .

Xét hệ phương trình  $\begin{cases} x = x_0 + a_1t & (1) \\ y = y_0 + a_2t & (2) \\ z = z_0 + a_3t & (3) \\ Ax + By + Cz + D = 0 & (4) \end{cases} (*)$



Lấy (1), (2), (3) thế vào (4)

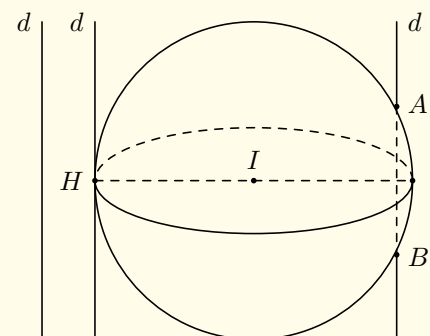
- Nếu (\*) có nghiệm duy nhất  $\Leftrightarrow d$  cắt  $(\alpha)$ .
- Nếu (\*) vô nghiệm  $\Leftrightarrow d \parallel (\alpha)$ .
- Nếu (\*) vô số nghiệm  $\Leftrightarrow d \subset (\alpha)$ .



**c. Vị trí tương đối giữa đường thẳng  $d$  và mặt cầu  $(S)$**

Cho mặt cầu  $(S)$  có tâm  $I$ , bán kính  $R$  và đường thẳng  $\Delta$ . Để xét vị trí tương đối giữa  $\Delta$  và  $(S)$  ta tính  $d(I, \Delta)$  rồi so sánh với bán kính  $R$ .

- Nếu  $d(I, \Delta) > R$  thì  $\Delta$  không cắt  $(S)$ .
- Nếu  $d(I, \Delta) = R$  thì  $\Delta$  tiếp xúc với  $(S)$  tại điểm  $H$ .
- Nếu  $d(I, \Delta) < R$  thì  $\Delta$  cắt  $(S)$  tại hai điểm  $A, B$ .



**B BÀI TẬP MẪU**

**CÂU 49.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho mặt cầu  $(S): (x - 1)^2 + y^2 + (z - 4)^2 = 9$ . Từ điểm  $A(4; 0; 1)$  nằm ngoài mặt cầu, kẻ một tiếp tuyến bất kỳ đến  $(S)$  với tiếp điểm  $M$ . Tập hợp  $M$  là đường tròn có bán kính bằng

- A  $\frac{3}{2}$ .                     
  B  $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ .                     
  C  $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ .                     
  D  $\frac{5}{2}$ .

**C BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ PHÁT TRIỂN**

**Câu 49.1.** Trong không gian tọa độ  $Oxyz$ , cho hai điểm  $A(1; 0; 0)$ ,  $B(5; 6; 0)$  và  $M$  là điểm thay đổi trên mặt cầu  $(S): x^2 + y^2 + z^2 = 1$ . Tập hợp các điểm  $M$  trên mặt cầu  $(S)$  thỏa mãn  $3MA^2 + MB^2 = 48$  có bao nhiêu phần tử?

- A 2.                                     
  B 3.                                     
  C 0.                                     
  D 1.

**Câu 49.2.** Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , cho ba điểm  $P, Q, R$  lần lượt di động trên ba trục tọa độ  $Ox, Oy, Oz$  (không trùng với gốc tọa độ  $O$ ) sao cho  $\frac{1}{OP^2} + \frac{1}{OQ^2} + \frac{1}{OR^2} = \frac{1}{8}$ . Biết mặt phẳng  $(PQR)$  luôn tiếp xúc với mặt cầu  $(S)$  cố định. Đường thẳng  $d$  thay đổi nhưng luôn đi qua  $M\left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}; 0\right)$  và cắt  $(S)$  tại hai điểm  $A, B$  phân biệt. Diện tích lớn nhất của tam giác  $AOB$  là

- A  $\sqrt{5}$ .                                     
  B  $\sqrt{17}$ .                                     
  C  $\sqrt{7}$ .                                     
  D  $\sqrt{15}$ .

**Câu 49.3.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho đường thẳng  $\Delta: \begin{cases} x = 9 + 3a + at \\ y = 4 + 3b + bt \\ z = 4 + 6a - 6b + 2(a - b)t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$ .

Gọi  $(S)$  là mặt cầu tâm  $O$ , có bán kính nhỏ nhất và tiếp xúc với  $\Delta$ . Khi đó  $(S)$  đi qua điểm nào sau đây?

- A  $M(1; 0; 0)$ .                                     
  B  $N\left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}; 1\right)$ .  
 C  $P\left(0; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$ .                                     
  D  $K\left(\frac{1}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{2}; \sqrt{3}\right)$ .

**Câu 49.4.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho mặt phẳng  $(P): x + y - z - 3 = 0$  và hai điểm  $A(1; 1; 1)$  và  $B(-3; -3; -3)$ . Mặt cầu  $(S)$  đi qua  $A, B$  và tiếp xúc với  $(P)$  tại điểm  $C$ . Biết rằng  $C$  luôn thuộc một đường tròn cố định, bán kính đường tròn đó bằng

- A  $R = 4$ .                                     
  B  $R = \frac{2\sqrt{33}}{3}$ .                                     
  C  $R = 6$ .                                     
  D  $\frac{2\sqrt{11}}{3}$ .

**Câu 49.5.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho mặt cầu  $(S)$  có tâm  $I(-2; 1; 2)$  và đi qua điểm  $A(1; -2; -1)$ . Xét các điểm  $B, C, D$  thuộc  $(S)$  sao cho  $AB, AC, AD$  đôi một vuông góc với nhau. Thể tích của khối tứ diện  $ABCD$  có giá trị lớn nhất bằng

- A 36.                                     
  B 216.                                     
  C 108.                                     
  D 72.

**Câu 49.6.** Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , cho ba điểm  $A(0; 1; 1)$ ,  $B(3; 0; -1)$ ,  $C(0; 21; -19)$  và mặt cầu  $(S): (x - 1)^2 + (y - 1)^2 + (z - 1)^2 = 1$ .  $M(a; b; c)$  là điểm thuộc mặt cầu  $(S)$  sao cho biểu thức  $T = 3MA^2 + 2MB^2 + MC^2$  đạt giá trị nhỏ nhất. Tính tổng  $a + b + c$ .

- (A)  $a + b + c = \frac{14}{5}$ .      (B)  $a + b + c = 0$ .      (C)  $a + b + c = \frac{12}{5}$ .      (D)  $a + b + c = 12$ .

**Câu 49.7.** Trong không gian  $Oxyz$  cho 3 điểm  $A(9; 0; 0)$ ,  $B(0; 6; 6)$ ,  $C(0; 0; -16)$  và điểm  $M$  chạy trên mặt phẳng  $(Oxy)$ . Tìm giá trị lớn nhất của  $S = \left| \left| \overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} \right| - 3MC \right|$ .

- (A) 45.      (B) 36.      (C) 30.      (D) 39.

**Câu 49.8.** Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$  cho ba điểm  $A(8; 5; -11)$ ,  $B(5; 3; -4)$ ,  $C(1; 2; -6)$  và mặt cầu  $(S): (x - 2)^2 + (y - 4)^2 + (z + 1)^2 = 9$ . Gọi điểm  $M(a; b; c)$  là điểm trên  $(S)$  sao cho  $\left| \overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} \right|$  đạt giá trị nhỏ nhất. Hãy tìm  $a + b$ .

- (A) 9.      (B) 6.      (C) 2.      (D) 4.

**Câu 49.9.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho hai mặt phẳng  $(\alpha): x - my + z + 6m + 3 = 0$  và  $(\beta): mx + y - mz + 3m - 8 = 0$  (với  $m$  là tham số thực); hai mặt phẳng này cắt nhau theo giao tuyến là đường thẳng  $\Delta$ . Gọi  $\Delta'$  là hình chiếu của  $\Delta$  lên mặt phẳng  $(Oxy)$ . Biết rằng khi  $m$  thay đổi thì đường thẳng  $\Delta'$  luôn tiếp xúc với một mặt cầu cố định có tâm  $I(a; b; c)$  thuộc mặt phẳng  $(Oxy)$ . Tính giá trị biểu thức  $P = 10a^2 - b^2 + 3c^2$ .

- (A)  $P = 9$ .      (B)  $P = 41$ .      (C)  $P = 73$ .      (D)  $P = 56$ .

**Câu 49.10.** Trong không gian tọa độ  $Oxyz$ , cho hai điểm  $M(-2; -2; 1)$ ,  $A(1; 2; -3)$  và đường thẳng  $d: \frac{x+1}{2} = \frac{y-5}{2} = \frac{z}{-1}$ . Tìm một véc-tơ chỉ phương  $\vec{u}$  của đường thẳng  $\Delta$  đi qua  $M$ , vuông góc với đường thẳng  $d$  đồng thời cách điểm  $A$  một khoảng bé nhất.

- (A)  $\vec{u} = (1; 0; 2)$ .      (B)  $\vec{u} = (1; 7; -1)$ .      (C)  $\vec{u} = (3; 4; -4)$ .      (D)  $\vec{u} = (2; 2; -1)$ .

**Câu 49.11.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho biết có hai mặt cầu có tâm nằm trên đường thẳng  $d: \frac{x}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+2}{-1}$ , tiếp xúc đồng thời với hai mặt phẳng  $(\alpha): x + 2y - 2z + 1 = 0$  và  $(\beta): 2x - 3y - 6z - 2 = 0$ . Gọi  $R_1, R_2$  ( $R_1 > R_2$ ) là bán kính của hai mặt cầu đó. Tỉ số  $\frac{R_1}{R_2}$  bằng

- (A)  $\sqrt{2}$ .      (B) 3.      (C) 2.      (D)  $\sqrt{3}$ .

**Câu 49.12.** Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$  cho điểm  $A(-2; 2; -2)$  và điểm  $B(3; -3; 3)$ . Điểm  $M$  thay đổi trong không gian thỏa mãn  $\frac{MA}{MB} = \frac{2}{3}$ . Điểm  $N(a; b; c)$  thuộc mặt phẳng  $(P): -x + 2y - 2z + 6 = 0$  sao cho  $MN$  nhỏ nhất. Tính tổng  $t = a + b + c$ .

- (A) 6.      (B) -2.      (C) 12.      (D) -6.

**Câu 49.13.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho mặt phẳng  $\pi$  và ba điểm  $A(1; 2; 1)$ ,  $B(0; 1; 2)$ ,  $C(0; 0; 3)$ . Điểm  $M(x_0; y_0; z_0)$  thuộc  $(P)$  sao cho  $MA^2 + 3MB^2 + 2MC^2$  đạt giá trị nhỏ nhất. Giá trị  $x_0 + 2y_0 - z_0$  bằng

- (A)  $\frac{46}{9}$ .      (B)  $\frac{4}{9}$ .      (C)  $\frac{2}{9}$ .      (D)  $\frac{6}{9}$ .

**Câu 49.14.** Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , xét đường thẳng  $\Delta$  đi qua điểm  $A(0; 0; 1)$  và vuông góc với mặt phẳng  $(Ozx)$ . Tính khoảng cách nhỏ nhất giữa điểm  $B(0; 4; 0)$  tới điểm  $C$  trong đó  $C$  là điểm cách đều đường thẳng  $\Delta$  và trục  $Ox$ .

- (A)  $\frac{1}{2}$ .                      (B)  $3\sqrt{2}$ .                      (C)  $\sqrt{6}$ .                      (D)  $\frac{\sqrt{65}}{2}$ .

**Câu 49.15.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho điểm  $M(3; 0; 4)$  và mặt cầu  $(S): (x - 1)^2 + (y + 2)^2 + (z - 4)^2 = 9$ . Qua điểm  $M$  vẽ 3 tia  $Mu, Mv, Mw$  đôi một vuông góc với nhau và cắt mặt cầu  $(S)$  lần lượt tại các điểm  $A, B, C$ . Gọi  $E$  là đỉnh đối diện với đỉnh  $M$  của hình hộp chữ nhật có 3 cạnh là  $MA, MB, MC$ . Biết điểm  $E$  luôn thuộc một mặt cầu cố định khi 3 tia  $Mu, Mv, Mw$  thay đổi thỏa mãn đề bài, tính bán kính mặt cầu đó.

- (A)  $\sqrt{13}$ .                      (B)  $4\sqrt{2}$ .                      (C)  $\sqrt{11}$ .                      (D)  $2\sqrt{3}$ .

**Câu 49.16.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho bốn điểm  $A(2; 0; 0), B(0; 4; 0), C(2; 4; 0), D(0; 0; 6)$  và mặt cầu  $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 6z = 0$ . Có bao nhiêu mặt phẳng cắt  $(S)$  theo một đường tròn có diện tích  $14\pi$  và cách đều năm điểm  $O, A, B, C, D$  ( $O$  là gốc tọa độ)?

- (A) 5.                      (B) 3.                      (C) 1.                      (D) Vô số.

**Câu 49.17.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho hai mặt phẳng  $(P): x - y + 2z + 1 = 0, (Q): 2x + y + z - 1 = 0$ . Gọi  $(S)$  là mặt cầu có tâm thuộc trục hoành, đồng thời  $(S)$  cắt mặt phẳng  $(P)$  theo giao tuyến là một đường tròn có bán kính bằng 2 và  $(S)$  cắt mặt phẳng  $(Q)$  theo giao tuyến là một đường tròn có bán kính bằng  $r$ . Xác định  $r$  sao cho chỉ đúng một mặt cầu  $(S)$  thỏa yêu cầu.

- (A)  $r = \frac{\sqrt{6}}{2}$ .                      (B)  $r = \frac{\sqrt{2}}{2}$ .                      (C)  $r = \frac{3\sqrt{2}}{2}$ .                      (D)  $r = \sqrt{3}$ .

**Câu 49.18.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho mặt cầu  $(S): x^2 + y^2 + (z + 2)^2 = 16$ , điểm  $A$  nằm trên

đường thẳng  $\Delta$  có phương trình  $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 + t \\ z = 2 \end{cases}$  và nằm ngoài mặt cầu  $(S)$ . Từ  $A$  kẻ các tiếp tuyến

đến mặt cầu  $(S)$ . Gọi  $(P_m)$  là mặt phẳng chứa các tiếp điểm, biết mặt phẳng  $(P_m)$  luôn chứa một đường thẳng  $d$  cố định. Phương trình đường thẳng  $d$  là

- (A)  $\begin{cases} x = t \\ y = -t \\ z = -2 \end{cases}$ .                      (B)  $\begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = 2 \end{cases}$ .                      (C)  $\begin{cases} x = t \\ y = -t \\ z = 2 \end{cases}$ .                      (D)  $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 - t \\ z = 2 \end{cases}$ .

**Câu 49.19.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho đường thẳng  $\Delta: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{2}$  và điểm  $M(2; 5; 3)$ . Mặt phẳng  $(P)$  chứa  $\Delta$  sao cho khoảng cách từ  $M$  đến  $(P)$  lớn nhất có phương trình là

- (A)  $x - 4y + z - 3 = 0$ .                      (B)  $x + 4y - z + 1 = 0$ .  
(C)  $x - 4y - z + 1 = 0$ .                      (D)  $x + 4y + z - 3 = 0$ .

**Câu 49.20.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho mặt cầu  $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 2z = 0$  và  $A(2; 2; 0)$ . Viết phương trình mặt phẳng  $(OAB)$  biết  $B$  thuộc mặt cầu  $(S)$ , có hoành độ dương và tam giác

$OAB$  đều.

- (A)  $x - y - z = 0$ .      (B)  $x - y - 2z = 0$ .      (C)  $x - y + z = 0$ .      (D)  $x - y + 2z = 0$ .

**Câu 49.21.** Trong không gian  $Oxyz$ , viết phương trình mặt phẳng tiếp xúc với mặt cầu  $(S): (x - 1)^2 + y^2 + (z + 2)^2 = 6$ , đồng thời song song với hai đường thẳng  $d_1: \frac{x - 2}{3} = \frac{y - 1}{-1} = \frac{z - 1}{-1}$  và

$$d_2: \frac{x}{1} = \frac{y + 2}{1} = \frac{z - 2}{-1}.$$

- (A)  $\begin{cases} x - y + 2z + 9 = 0 \\ x - y + 2z - 3 = 0 \end{cases}$ .      (B)  $x + y + 2z + 9 = 0$ .
- (C)  $\begin{cases} x + y + 2z + 9 = 0 \\ x + y + 2z - 3 = 0 \end{cases}$ .      (D)  $x - y + 2z - 3 = 0$ .

**Câu 49.22.** Trong không gian  $Oxyz$ , đường thẳng  $d: \frac{x - 1}{2} = \frac{y - 1}{1} = \frac{z}{-1}$  cắt mặt phẳng  $(P): x + 2y + z - 6 = 0$  tại điểm  $M$ . Gọi  $(S)$  là mặt cầu có tâm  $I(a; b; c)$  ( $a < 0$ ) thuộc đường thẳng  $d$  và tiếp xúc với mặt phẳng  $(P)$  tại điểm  $A$  sao cho diện tích tam giác  $IAM$  bằng  $3\sqrt{3}$ .

Giá trị của  $2a + b - c$  bằng

- (A)  $-3$ .      (B)  $2$ .      (C)  $3$ .      (D)  $-3$ .

### (D) BẢNG ĐÁP ÁN

49.1. D	49.2. C	49.3. D	49.4. C	49.5. A	49.6. A	49.7. D	49.8. C
49.9. B	49.10. A	49.11. B	49.12. B	49.13. C	49.14. A	49.15. C	49.16. B
49.17. C	49.18. C	49.19. A	49.20. A	49.21. C	49.22. D		

## DẠNG 50. TÍNH ĐƠN ĐIỀU CỦA HÀM SỐ LIÊN KẾT

### A KIẾN THỨC CẦN NHỚ.

#### 1. Định nghĩa

Giả sử  $\mathcal{K}$  là một khoảng, đoạn hoặc nửa khoảng và  $y = f(x)$  là một hàm số xác định trên  $\mathcal{K}$ .  
Ta nói

- Hàm số  $y = f(x)$  được gọi là **đồng biến** (tăng) trên  $\mathcal{K}$  nếu

$$\forall x_1, x_2 \in \mathcal{K}, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2).$$

- Hàm số  $y = f(x)$  được gọi là **nghịch biến** (giảm) trên  $\mathcal{K}$  nếu

$$\forall x_1, x_2 \in \mathcal{K}, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2).$$

Hàm số đồng biến hoặc nghịch biến trên  $\mathcal{K}$  gọi chung là **đơn điệu** trên  $\mathcal{K}$ .

#### 2. Tính chất

- a) Nếu hàm số  $f(x)$  và  $g(x)$  cùng đồng biến (nghịch biến) trên  $\mathcal{K}$  thì hàm số  $f(x) + g(x)$  cũng đồng biến (nghịch biến) trên  $\mathcal{K}$ .

Tính chất này có thể không đúng đối với hiệu  $f(x) - g(x)$ .

- b) Nếu hàm số  $f(x)$  và  $g(x)$  là các hàm số dương và cùng đồng biến (nghịch biến) trên  $\mathcal{K}$  thì hàm số  $f(x) \cdot g(x)$  cũng đồng biến (nghịch biến) trên  $\mathcal{K}$ .

Tính chất này có thể không đúng khi các hàm số  $f(x), g(x)$  không là các hàm số dương trên  $\mathcal{K}$ .

- c) Cho hàm số  $u = u(x)$  xác định với mọi  $x \in (a; b)$  và  $u(x) \in (c; d)$ . Hàm số  $f(u(x))$  cũng xác định với  $x \in (a; b)$ . Ta có nhận xét sau:

i) Giả sử hàm số  $u = u(x)$  đồng biến với mọi  $x \in (a; b)$ . Khi đó, hàm số  $f(u(x))$  đồng biến trên  $(a; b)$  khi và chỉ khi  $f(u)$  đồng biến trên  $(c; d)$ .

ii) Giả sử hàm số  $u = u(x)$  nghịch biến với mọi  $x \in (a; b)$ . Khi đó, hàm số  $f(u(x))$  nghịch biến  $(a; b)$  khi và chỉ khi  $f(u)$  nghịch biến  $(c; d)$ .

#### 3. Định lý 1

Giả sử hàm số  $f$  có đạo hàm trên khoảng  $\mathcal{K}$ . Khi đó

- Nếu  $f'(x) > 0, \forall x \in \mathcal{K}$  thì hàm số  $f$  đồng biến trên  $\mathcal{K}$ .



- Nếu  $f'(x) < 0, \forall x \in \mathcal{K}$  thì hàm số  $f$  nghịch biến trên  $\mathcal{K}$ .
- Nếu  $f'(x) = 0, \forall x \in \mathcal{K}$  thì hàm số  $f$  không đổi trên  $\mathcal{K}$ .

Khoảng  $\mathcal{K}$  trong định lí trên ta có thể thay thế bởi đoạn hoặc nửa khoảng. Khi đó phải có thêm giả thiết “Hàm số liên tục trên đoạn hoặc nửa khoảng đó”. Chẳng hạn, nếu hàm số  $f$  liên tục trên đoạn  $[a; b]$  và  $f'(x) > 0, \forall x \in (a; b)$  thì hàm số  $f$  đồng biến trên đoạn  $[a; b]$ . Ta thường biểu diễn qua bảng biến thiên như sau:

$x$	$a$	$b$
$f'(x)$	+	
$f(x)$	$f(a)$	$f(b)$

#### 4. Định lí 2

Giả sử hàm số  $f$  có đạo hàm trên khoảng  $\mathcal{K}$ . Khi đó

- Nếu  $f'(x) \geq 0, \forall x \in \mathcal{K}$  và  $f'(x) = 0$  chỉ tại hữu hạn điểm thuộc  $\mathcal{K}$  thì hàm số  $f$  đồng biến trên  $\mathcal{K}$ .
- Nếu  $f'(x) \leq 0, \forall x \in \mathcal{K}$  và  $f'(x) = 0$  chỉ tại hữu hạn điểm thuộc  $\mathcal{K}$  thì hàm số  $f$  nghịch biến trên  $\mathcal{K}$ .

#### Quy tắc xét tính đơn điệu của hàm số

Giả sử hàm số  $f$  có đạo hàm trên  $\mathcal{K}$ .

Hàm số  $y = |f(x)|$  đồng biến trên tập  $K$  khi và chỉ khi  $f^2(x)$  đồng biến trên  $K \Leftrightarrow f'(x) \cdot f(x) \geq 0$  với  $\forall x \in K$ .

### B BÀI TẬP MẪU

#### CÂU 50 (Đề minh họa BGD 2022-2023).

Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số  $a \in (-10; +\infty)$  để hàm số  $y = |x^3 + (a + 2)x + 9 - a^2|$  đồng biến trên khoảng  $(0; 1)$ ?

- (A) 12.                      (B) 11.                      (C) 6.                      (D) 5.

## **BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ PHÁT TRIỂN**

**Câu 50.1.** Cho hàm số  $f(x) = x^4 + 2x^2 + 1$ . Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số  $m$  để hàm số  $g(x) = f(3|x - m| + m^2)$  đồng biến trên  $(5; +\infty)$  ?

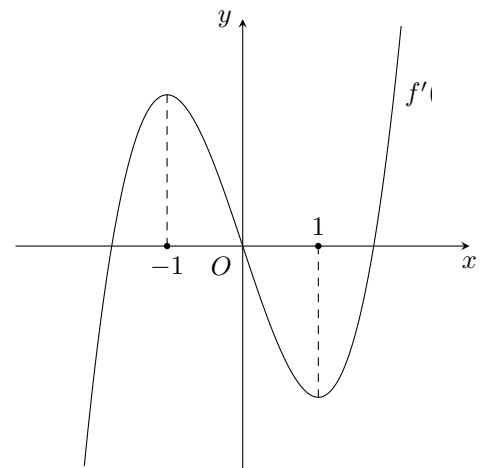
- (A) 3.                      (B) Vô số.                      (C) 5.                      (D) 2.

**Câu 50.2.** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số  $m$  nhỏ hơn 10 để hàm số  $y = |3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + m|$  nghịch biến trên khoảng  $(-\infty; -1)$ ?

- (A) 5.                      (B) 6.                      (C) 3.                      (D) 4.

**Câu 50.3.**

Cho hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm liên tục trên  $\mathbb{R}$  và  $f(1) = 1$ . Đồ thị hàm số  $y = f'(x)$  như hình bên. Có bao nhiêu số nguyên dương  $a$  để hàm số  $y = |4f(\sin x) + \cos 2x - a|$  nghịch biến trên khoảng  $(0; \frac{\pi}{2})$ ?



- (A) 3.                      (B) Vô số.                      (C) 5.                      (D) 2.

**Câu 50.4.** Cho hàm số  $y = f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + mx + 2$ . Có bao nhiêu giá trị nguyên của  $m \in [-2020; 2020]$  để hàm số  $y = f(|x - 2|)$  đồng biến trên  $(-2; 0)$ .

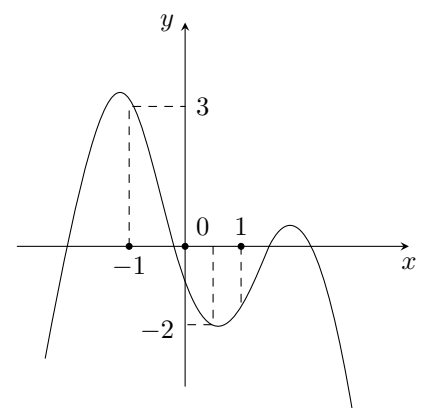
- (A) 2020.                      (B) 2021.                      (C) 2012.                      (D) 2013.

**Câu 50.5.** Cho hàm số  $y = f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$ . Hỏi có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số  $m \in [-10; 10]$  để hàm số  $g(x) = f(|x + m|)$  nghịch biến trên  $(0; 1)$ ?

- (A) 10.                      (B) 8.                      (C) 9.                      (D) 7.

**Câu 50.6.**

Cho hàm số  $y = f(x)$  có đồ thị đạo hàm được cho như hình vẽ bên dưới và có  $f(1) = 1$ . Gọi  $S$  là tập chứa tất cả các giá trị nguyên của tham số  $m \in [-2020; 2020]$  để hàm số  $y = |2f(2 - x) - x^2 + 2mx + 12|$  đồng biến trên khoảng  $(1; 3)$ . Số phần tử của tập  $S$  tương ứng bằng



- (A) 4033.                      (B) 4028.                      (C) 4027.                      (D) 4029.

**Câu 50.7.** Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  và có bảng biến thiên như sau

$x$	$-\infty$	$-1$	$1$	$+\infty$	
$y'$	$+$	$0$	$-$	$0$	$+$
$y$	$-\infty$	$0$	$-4$	$+\infty$	

Phương trình  $|f(8x^4 - 8x^2 + 1)| = \frac{1}{2}$  có tất cả bao nhiêu nghiệm thực phân biệt?

- (A) 8.                      (B) 12.                      (C) 6.                      (D) 10.

**Câu 50.8.** Có bao nhiêu giá trị nguyên âm của tham số  $m$  để hàm số  $y = |x^5 + 2x^4 - mx^2 + 3x - 20|$  nghịch biến trên  $(-\infty; -2)$ ?

- (A) 7.                      (B) 9.                      (C) 4.                      (D) 6.

**Câu 50.9.** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số  $m \in (-2022; 2022)$  để hàm số  $y = |x^3 + (2m + 1)x - 2|$  đồng biến trên  $(1; 3)$ ?

- (A) 4032.                      (B) 4034.                      (C) 2022.                      (D) 4030.

**Câu 50.10.** Gọi  $S$  là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của  $m$  sao cho hàm số  $y = |-x^4 + mx^3 + 2m^2x^2 + m - 1|$  đồng biến trên  $(1; +\infty)$ . Tổng tất cả các phần tử của  $S$  là

- (A)  $-2$ .                      (B)  $2$ .                      (C)  $-1$ .                      (D)  $0$ .

**Câu 50.11.** Có bao nhiêu số nguyên  $m \in (-20; 20)$  để hàm số  $y = |3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + m|$  nghịch biến trên khoảng  $(-\infty; -1)$ .

- (A) 8.                      (B) 15.                      (C) 4.                      (D) 30.

**Câu 50.12.** Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của  $m$  để hàm số  $y = |x^3 - mx^2 + 12x + 2m|$  luôn đồng biến trên khoảng  $(1; +\infty)$ ?

- (A) 519.                      (B) 21.                      (C) 20.                      (D) 18.

**Câu 50.13.** Cho hàm số  $y = f(x) = |x^4 - 4x^2 + 4mx + m + 2017|$ . Gọi  $S$  là tập chứa tất cả các giá trị nguyên của tham số  $m$  để hàm số  $y = f(x)$  đồng biến trên khoảng  $(-2; 3)$ . Số phần tử của tập  $S$  bằng

- (A) 275.                      (B) 276.                      (C) 0.                      (D) 277.

**Câu 50.14.** Có bao nhiêu số nguyên  $m$  thuộc khoảng  $(-10; 10)$  để hàm số  $y = |2x^3 - 2mx + 3|$  đồng biến trên  $(1; +\infty)$ ?

- (A) 11.                      (B) 7.                      (C) 12.                      (D) 8.

**Câu 50.15.** Cho hàm số  $f(x) = \left| -\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}(2m + 3)x^2 - (m^2 + 3m)x + \frac{2}{3} \right|$ . Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số  $m$  thuộc  $[-9; 9]$  để hàm số nghịch biến trên khoảng  $(1; 2)$ ?

- (A) 16.                      (B) 9.                      (C) 3.                      (D) 2.

**Câu 50.16.** Có bao nhiêu giá trị nguyên thuộc đoạn  $[-2019; 2019]$  của tham số thực  $m$  để hàm số  $y = |x^3 - 3(m + 2)x^2 + 3m(m + 4)x|$  đồng biến trên khoảng  $(0; 2)$ ?

- (A) 2019.                      (B) 2016.                      (C) 4039.                      (D) 4037.

**Câu 50.17.** Có bao nhiêu giá trị nguyên của  $m$  thuộc  $[0; 5]$  để hàm số  $y = |x^3 - 3(m + 2)x^2 + 3m(m + 4)x|$  đồng biến trên khoảng  $(0; 3)$ ?

- (A) 35.                      (B) 4.                      (C) 6.                      (D) 5.

**Câu 50.18.** Tìm số giá trị nguyên của  $m \in [-2023; 2023]$  để hàm số  $y = |x^3 - 6x^2 + 5 + m|$  đồng biến trên  $(5; +\infty)$ .

- (A) 2023.                      (B) 2047.                      (C) 2004.                      (D) 20.

**Câu 50.19.** Có bao nhiêu số nguyên dương  $m$  để hàm số  $y = |4x^3 - mx + 1|$  đồng biến trên khoảng  $(1; +\infty)$ ?

- (A) 11.                      (B) 12.                      (C) 4.                      (D) 5.

**Câu 50.20.** Có bao nhiêu số nguyên dương của tham số  $m$  để hàm số  $y = |x^3 - 3x^2 - mx|$  đồng biến trên khoảng  $(2; +\infty)$ ?

- (A) 0.                      (B) 1.                      (C) 2.                      (D) Vô số.

**(D) BẢNG ĐÁP ÁN**

50.1. C	50.2. A	50.3. A	50.4. C	50.5. A	50.6. D	50.7. A	50.8. C
50.9. D	50.10. C	50.11. B	50.12. C	50.13. B	50.14. C	50.15. C	50.16. D
50.17. B	50.18. C	50.19. D	50.20. A				